Метод Штурма

1. Даны положительные числа $a_1 < a_2 \leqslant b_2 < b_1$, причём $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$. Сравните числа

(а) $a_1 b_1$ и $a_2 b_2$;

(б) $a_1^2 + b_1^2$ и $a_2^2 + b_2^2$;

(в) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}$ и $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}$;

(г) $\sqrt{a_1} + \sqrt{b_1}$ и $\sqrt{a_2} + \sqrt{b_2}$.

(д) Пусть теперь положительные числа $a_1 < a_2 \leqslant b_2 < b_1$ таковы, что $a_1 b_1 = a_2 b_2$. Сравните числа $a_1 + b_1$ и $a_2 + b_2$.

Идея. Если нужно найти максимум/минимум некоторого выражения, попробуйте "сближать" пару переменных с сохранением суммы или произведения.

2. **(а)** Положительные числа a и b в сумме дают 1. Найдите наибольшее возможное значение числа ab.

(б) Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 1$. Докажите, что $abc \leqslant \frac{1}{27}$.

Подсказка. Если каждый раз сближать переменные до их полного равенства, процесс может продолжаться бесконечно. А что если сближать переменные, пока одна из них не достигнет $\frac{1}{3}$?

(в) Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в сумме дают 1. Докажите, что $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}$.

3. Даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенству $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$.
(а) Докажите неравенство

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \ldots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

(б) Докажите неравенство

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)} \geqslant \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

4. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют равенству $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Докажите неравенство

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 2^n.$$

5. Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\sqrt{1+5x} + \sqrt{1+5y} + \sqrt{1+5z}.$$

6. Сумма положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна 1. Докажите неравенство

$$(1+a_1)(2+a_2)\cdots(n+a_n) \leqslant 2n!.$$

7. Для положительных чисел x, y, z выполняется равенство $x + y + z = 1$. Докажите неравенство

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$