

Квадратный трёхчлен

Определение. Квадратным трёхчленом называется выражение вида ax^2+bx+c , где a, b, c — коэффициенты, x — переменная. Дискриминантом квадратного трёхчлена ax^2+bx+c называется число $D = b^2 - 4ac$.

Теорема. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет следующие решения:

- Если $D < 0$, то решений (вещественных) нет;
- Если $D = 0$, то решение одно, оно равно $-\frac{b}{2a}$;
- Если $D > 0$, то решений два, они могут быть найдены по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Теорема Виета. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Тогда

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

1. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ с вещественными коэффициентами имеет корни. Верно ли, что квадратный трёхчлен **(а)** $a^3x^2 + b^3x + c^3$; **(б)** $a^4x^2 + b^4x + c^4$ также имеет корни?
2. Про вещественные числа a, b, c известно, что $c(a + b + c) < 0$. Докажите, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня.
3. **(а)** Даны ненулевые вещественные числа a, b, c . Докажите, что хотя бы один из трёхчленов

$$ax^2 + 2bx + c, \quad bx^2 + 2cx + a, \quad cx^2 + 2ax + b$$

имеет корень.

(б) Докажите, что при любых значениях a, b, c хотя бы одно из уравнений

$$x^2 + ax + b = 1, \quad x^2 + bx + c = 1, \quad x^2 + cx + a = 1.$$

4. Квадратный трёхчлен $x^2 + ax + b + 1$ имеет два натуральных корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ — составное.
5. Даны три приведённых квадратных трёхчлена с дискриминантами 25, 49 и 144. Лена хочет разбить шесть корней этих трёхчленов на две группы с равными суммами. Всегда ли ей удастся сделать это?
6. Ваня вступил в Клуб Любителей Алгебры и на очередном мероприятии записал на доску квадратный трёхчлен $x^2 + 1111x + 2222$, после чего участники клуба друг за другом меняли на единицу либо свободный член, либо коэффициент при x . В результате на доске оказался трёхчлен $x^2 + 2222x + 1111$. Правда ли, что в какой-то момент на доске обязательно оказался трёхчлен с целыми корнями?
7. Ваня выписал на доску числа $2^0, 2^1, \dots, 2^{2024}$. Вадим хочет разбить эти числа на две группы с суммами p и q так, чтобы квадратный трёхчлен $x^2 - px + q$ имел целый корень. Сколькими способами он может это сделать?