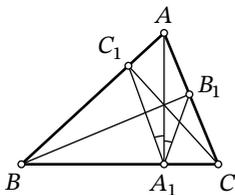


Ортоцентр

1.



Высоты треугольника являются биссектрисами углов его ортотреугольника.

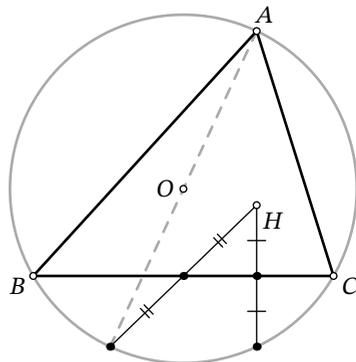
Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — высоты треугольника ABC . Докажите, что A_1A — биссектриса треугольника $A_1B_1C_1$.

2. **Лемма об отражении ортоцентра.**

Пусть H — ортоцентр треугольника ABC .

(а) Докажите, что точка, симметричная H относительно BC , лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

(б) Докажите, что точка, симметричная H относительно середины стороны BC , лежит на окружности, описанной около треугольника ABC , и диаметрально противоположна точке A .



3. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что точка, симметричная A_1 относительно CC_1 , лежит на прямой B_1C_1 .

4. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . Известно, что $\angle BAC = 45^\circ$. Докажите, что четырёхугольник OB_1HC_1 — параллелограмм.

5. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC . Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC , AHB , BHC и AHC , равны между собой.

6. Высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки X и Y — середины отрезков BC и AH соответственно. Докажите, что прямые XY и B_1C_1 перпендикулярны.

7. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC , O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к отрезку OH пересекает сторону BC в точке X . Докажите, что $\angle OXH = 2\angle OAH$.

