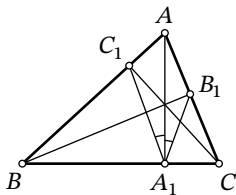


## Ортоцентр

1.



**Высоты треугольника являются биссектрисами углов его ортотреугольника.**

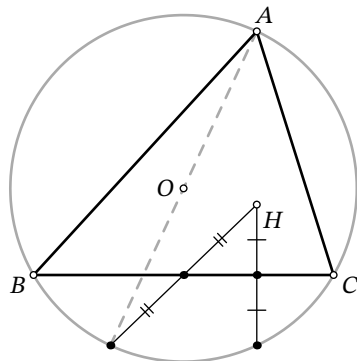
Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  — высоты треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $A_1A$  — биссектриса треугольника  $A_1B_1C_1$ .

2. **Лемма об отражении ортоцентра.**

Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ .

(а) Докажите, что точка, симметричная  $H$  относительно  $BC$ , лежит на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

(б) Докажите, что точка, симметричная  $H$  относительно середины стороны  $BC$ , лежит на окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , и диаметрально противоположна точке  $A$ .



3. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что точка, симметричная  $A_1$  относительно  $CC_1$ , лежит на прямой  $B_1C_1$ .

4. Высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Точка  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Известно, что  $\angle BAC = 45^\circ$ . Докажите, что четырёхугольник  $OB_1HC_1$  — параллелограмм.

5. Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников  $ABC$ ,  $AHB$ ,  $BHC$  и  $AHC$ , равны между собой.

6. Высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Точки  $X$  и  $Y$  — середины отрезков  $BC$  и  $AH$  соответственно. Докажите, что прямые  $XY$  и  $B_1C_1$  перпендикулярны.

7. Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ ,  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Серединный перпендикуляр к отрезку  $OH$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $X$ . Докажите, что  $\angle OXH = 2\angle OAH$ .

