Теорема Эйлера

Напомним, что для любого натурального n число $\varphi(n)$ определяется как количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.

Если разложить n в произведение простых множителей $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, то $\varphi(n)$ может быть найдено по формуле

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_k^{\alpha_k-1} \cdot (p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1).$$

Теорема Эйлера. Дано натуральное число n. Целое число a взаимно просто с n. Тогда

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

1. **(а)** Целое число a взаимно просто с натуральным n. Выпишем все взаимно простые с n натуральные числа, не превосходящие n

$$1 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(n)} \leqslant n.$$

Докажите, что числа $a \cdot x_1, a \cdot x_2, \ldots, a \cdot x_{\varphi(n)}$ при делении на n дают все взаимно простые с n остатки по одному разу.

(б) Докажите теорему Эйлера.

Подсказка: рассмотрите произведение выписанных чисел.

2. Найдите остаток от деления

(а) 13^{100} на 18;

(б) 2018^{2018} на 49;

(в) $2003^{2003^{2003}}$ на 100.

3. **(а)** Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 0001.

(б) Докажите, что к числу 2^{100} можно приписать слева несколько цифр так, чтобы снова получилась степень двойки.

4. Число n разложили в произведение простых $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Обозначим

$$m = \text{НОК}\left(\varphi(p_1^{\alpha_1}),\ \varphi(p_2^{\alpha_2}),\ \ldots,\ \varphi(p_k^{\alpha_k})\right).$$

Целое число a взаимно просто с n. Докажите, что $a^m \equiv 1 \pmod{n}$.

5. **(а)** Докажите, что при любом нечётном n число $2^{n!} - 1$ делится на n.

(б) Докажите, что при любом чётном n число $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$.

6. Дано натуральное $n > 3$. Докажите, что $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ делится на 1989.