Теорема Эйлера

Напомним, что для любого натурального n число $\varphi(n)$ определяется как количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.

Если разложить n в произведение простых множителей $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, то $\varphi(n)$ может быть найдено по формуле

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_k^{\alpha_k-1} \cdot (p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1).$$

Теорема Эйлера. Дано натуральное число n. Целое число a взаимно просто с n. Тогда

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

1. Докажите теорему Эйлера.

Подсказка: попробуйте модифицировать доказательство малой теоремы Ферма.

2. Найдите остаток от деления

(а) 5^{101} на 36;

(б) 2024^{2024} на 49;

(в) $2003^{2003^{2003}}$ на 100.

3. **(а)** Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 0001.

(б) Докажите, что к числу 2^{100} можно приписать слева несколько цифр так, чтобы снова получилась степень двойки.

4. **(а)** Докажите, что при любом нечётном n число $2^{n!}-1$ делится на n.

(б) Докажите, что при любом чётном n число $2^{n!}-1$ делится на n^2-1.

5. Дано натуральное $n > 3$. Докажите, что $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ делится на 1989.

6. Докажите, что для любого натурального n существует делящееся на n натуральное число, сумма цифр которого равна n.

7. Даны натуральные числа a и b, причём $(a, b) = 1$ и $a > 1$. Докажите, что найдётся натуральное n, при котором

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^n \ \vdots\ b.$$