Теорема Фалеса и подобие

Теорема Фалеса. На одной прямой отмечены точки A_1, B_1, C_1, на другой — A_2, B_2, C_2, причём $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$. Тогда
$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

1. **(a)** Жук сидит на стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Он четыре раза последовательно переполз на соседнюю сторону, двигаясь параллельно диагоналям AC, BD, AC, BD. Докажите, что жук вернулся в исходную точку.
   (b) Жук сидит на стороне AB треугольника ABC. Он шесть раз последовательно переполз на соседнюю сторону, двигаясь параллельно сторонам CA, AB, BC, CA, AB, BC. Докажите, что жук вернулся в исходную точку.

2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом k (то есть $\frac{AB}{A_1B_1} = k$). Докажите, что
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2.$$

3. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка X, а на сторонах AB и CD соответственно точки Y и Z так, что $XY \parallel BD$, $XZ \parallel AC$. Докажите, что площади треугольников BXY и CXZ равны.

4. **(a)** Точки B' и C' на сторонах AB и AC соответственно треугольника ABC таковы, что $BC \parallel B'C'$. Через вершину A провели прямую, пересекающую BC и $B'C'$ в точках D и D' соответственно. Докажите, что
$$\frac{BD}{CD} = \frac{B'D'}{C'D'}.$$
   (б) Докажите, что середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD **(a)** внутреннего **(b)** внешнего угла. Докажите, что $AD : DC = AB : BC$.

6. На сторонах BC и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно, причём $BK : KC = 1 : 3$, $AL : LC = 2 : 5$. Отрезки BL и AK пересекаются в точке O. Найдите $AO : OK$.

7. Пусть B_1 и C_1 — проекции вершин B и C треугольника ABC на внешнюю биссектрису его угла A. Докажите, что отрезки B_1C и C_1B пересекаются на внутренней биссектрисе угла A.