Теорема Фалеса и подобие

Теорема Фалеса. На одной прямой отмечены точки A_1, B_1, C_1, на другой — A_2, B_2, C_2, причём $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$. Тогда

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

1. **(a)** Жук сидит на стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Он четыре раза последовательно переполз на соседнюю сторону, двигаясь параллельно диагоналям AC, BD, AC, BD. Докажите, что жук вернулся в исходную точку.
   (b) Жук сидит на стороне AB треугольника ABC. Он шесть раз последовательно переполз на соседнюю сторону, двигаясь параллельно сторонам CA, AB, BC, CA, AB, BC. Докажите, что жук вернулся в исходную точку.

2. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка X, а на сторонах AB и CD соответственно точки Y и Z так, что $XY \parallel BD$, $XZ \parallel AC$. Докажите, что площади треугольников BXY и CXZ равны.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD **(a)** внутреннего **(b)** внешнего угла. Докажите, что $AD : DC = AB : BC$.

4. На сторонах BC и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно, причём $BK : KC = 1 : 3$, $AL : LC = 2 : 5$. Отрезки BL и AK пересекаются в точке O. Найдите $AO : OK$.

5. Пусть B_1 и C_1 — проекции вершин B и C треугольника ABC на внешнюю биссектрису его угла A. Докажите, что отрезки B_1C и C_1B пересекаются на внутренней биссектрисе угла A.

6. В трапеции $ABCD$ на боковой стороне AB дана точка K. Через точку A провели прямую ℓ, параллельную прямой KC а через точку B — прямую m, параллельную прямой KD. Докажите, что точка пересечения прямых ℓ и m лежит на стороне CD.

7. Прямая ℓ пересекает стороны AB, AD и диагональ AC параллелограмма $ABCD$ в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что $\frac{AB}{AX} + \frac{AD}{AY} = \frac{AC}{AZ}$.