Функция Эйлера

Определение. Пусть n — натуральное число. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ определяется как количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.

1. Дано натуральное число $n > 2$. Докажите, что $\varphi(n)$ делится на 2.

2. Даны различные простые числа p и q. Найдите **(а)** $\varphi(p)$; **(б)** $\varphi(p^\alpha)$; **(в)** $\varphi(pq)$.

3. Даны взаимно простые числа a и b.

(а) Ваня записал в клетках таблицы $a \times b$ натуральные числа от 1 до ab слева направо и сверху вниз (на картинке ниже приведён пример заполнения для $a = 3$, $b = 5$). Докажите, что если в некотором столбце нашлось число взаимно простое с b, то все числа этого столбца взаимно просты с b. Сколько таких столбцов?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

(б) Рассмотрим некоторый столбец. Докажите, что числа этого столбца дают все возможные остатки от деления на a по одному разу.

(в) Мультипликативность функции Эйлера. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

4. Натуральное число n разложили в произведение простых $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Докажите, что

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_k^{\alpha_k-1} \cdot (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1).$$

5. Найдите все натуральные n, при которых

(а) $\varphi(n) = 4$;

(б) $\varphi(n) = \frac{n}{3}$.

6. Докажите, что если n делится на m, то $\varphi(n)$ делится на $\varphi(m)$.

7. Дано натуральное число n. Докажите, что

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n.$$

Суммирование ведётся по всем делителям d числа n.