Функция Эйлера

Определение. Пусть n — натуральное число. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ определяется как количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.

1. Дано натуральное число $n > 2$. Докажите, что $\varphi(n)$ делится на 2.

2. Даны различные простые числа p и q. Найдите **(а)** $\varphi(p)$; **(б)** $\varphi(p^\alpha)$; **(в)** $\varphi(pq)$.

3. **Мультипликативность функции Эйлера.** Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что
$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$
Подсказка: воспользуйтесь китайской теоремой об остатках.

4. Натуральное число n разложили в произведение простых $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Докажите, что
$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_k^{\alpha_k-1} \cdot (p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1).$$

5. Найдите все пары натуральных чисел n, m, удовлетворяющие равенству $\varphi(\varphi(n^m)) = n$.

6. Дано натуральное число n. Докажите, что
$$\sum_{d\,|\,n} \varphi(d) = n.$$
Суммирование ведётся по всем делителям d числа n.

7. Между двумя единицами пишется двойка, затем между любыми двумя соседними числами пишется их сумма и т. д. Сколько раз будет выписано число n?