

## Площадь - 2

1. Диагонали  $AC$  и  $BD$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что треугольники  $AOB$  и  $COD$  имеют одинаковую площадь.
2. Точка  $X$  лежит внутри параллелограмма  $ABCD$ . Докажите, что  $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{DAX}$ .
3. Внутри стороны  $BC$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  нашлась такая точка  $E$ , что прямая  $AE$  делит четырёхугольник на две равные по площади части. Какая из вершин четырёхугольника находится дальше всех от прямой  $AE$ ?
4. Диагонали выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  равны и пересекаются в точке  $O$ . Точка  $P$  внутри треугольника  $AOD$  такова, что  $CD \parallel BP$  и  $AB \parallel CP$ . Докажите, что точка  $P$  лежит на биссектрисе угла  $AOD$ .
5. Пусть  $ABC$  — остроугольный треугольник,  $C'$  и  $A'$  — произвольные точки на сторонах  $AB$  и  $BC$  соответственно,  $B'$  — середина стороны  $AC$ . Докажите, что площадь треугольника  $A'B'C'$  не больше половины площади треугольника  $ABC$ .
6. На описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$  отмечены такие точки  $D$  и  $E$ , что  $BD \perp AC$ ,  $AE$  — диаметр. Докажите, что  $S_{ABC} = S_{AECD}$ .
7. **Лемма о Чебурашке.** Даны две равные окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$ . На отрезке  $O_1O_2$  взяты точки  $X$  и  $Y$  так, что  $O_1X = O_2Y$ . Точки  $A$  и  $B$  лежат на  $\omega_1$  и прямая  $AB$  проходит через  $X$ . Точки  $C$  и  $D$  лежат на  $\omega_2$  и прямая  $CD$  проходит через  $Y$ . Докажите, что существует окружность, которая касается прямых  $AO_1, BO_1, CO_2, DO_2$ .

