

Площадь - 2

1. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что треугольники AOB и COD имеют одинаковую площадь.
2. Внутри стороны BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка E , что прямая AE делит четырёхугольник на две равные по площади части. Какая из вершин четырёхугольника находится дальше всех от прямой AE ?
3. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O . Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD .
4. На описанной окружности остроугольного треугольника ABC отмечены такие точки D и E , что $BD \perp AC$, AE — диаметр. Докажите, что $S_{ABC} = S_{AEC D}$.
5. Пусть ABC — остроугольный треугольник, C' и A' — произвольные точки на сторонах AB и BC соответственно, B' — середина стороны AC . Докажите, что площадь треугольника $A'B'C'$ не больше половины площади треугольника ABC .
6. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники AXB и BYC соответственно. Докажите, что $S_{AXD} = S_{CYD}$.
7. **Лемма о Чебурашке.** Даны две равные окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 . На отрезке O_1O_2 взяты точки X и Y так, что $O_1X = O_2Y$. Точки A и B лежат на ω_1 и прямая AB проходит через X . Точки C и D лежат на ω_2 и прямая CD проходит через Y . Докажите, что существует окружность, которая касается прямых AO_1 , BO_1 , CO_2 , DO_2 .

