Принцип крайнего в комбинаторной геометрии

1. На каждой стороне выпуклого четырёхугольника как на диаметре построен круг. Докажите, что объединение этих четырёх кругов покрывает весь четырёхугольник.

2. На каждой из 15 планет, расстояния между которыми попарно различны, находится по астроному, каждый из которых наблюдает за ближайшей к нему планетой. Докажите, что некоторую планету никто не наблюдает.

3. На плоскости даны $n > 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.
(а) Докажите, что можно выбрать две из них так, что отрезок, их соединяющий, виден из любой другой отмеченной точки под острым углом.
(б) Докажите, что существует окружность, проходящая через какие-то три из данных точек и не содержащая внутри ни одной из оставшихся точек.

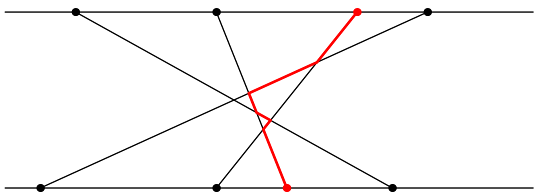
4. На плоскости синим и красным цветом окрашено несколько точек так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой. Докажите, что можно найти треугольник с одноцветными вершинами, на трёх сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.

5. На клетчатой доске $n \times n$ отметили m центров её клеток так, что не существует выпуклого четырёхугольника с вершинами в отмеченных точках. Найдите наибольшее возможное значение m.

6. Дана горизонтальная полоса на плоскости, края которой — параллельные прямые, и 20 прямых, пересекающих эту полосу. Каждые две из этих прямых пересекаются внутри полосы и никакие три из них не проходят через одну точку. Рассмотрим все пути, начинающиеся на нижней кромке полосы, идущие по данным прямым и заканчивающиеся на верхней кромке полосы, обладающие двумя свойствами:

1. Идя по такому пути, мы всё время поднимаемся вверх;
2. Дойдя до точки пересечения прямых, мы обязаны переходить на другую прямую (см. рисунок).

Докажите, что среди таких путей а) есть не менее 10 путей без общих точек; б) есть путь, проходящий по всем 20 прямым.



7. **Теорема Сильвестра.**
(а) На плоскости дано конечное множество непараллельных друг другу прямых. Известно, что через любую точку пересечения прямых множества проходит по крайней мере ещё одна прямая множества. Докажите, что все прямые множества пересекаются в одной точке.

(б) На плоскости дано конечное множество точек. Известно, что любая прямая, соединяющая какие-то две точки множества, содержит по крайней мере ещё одну точку множества. Докажите, что все точки множества лежат на одной прямой.