Площадь

1. Пусть X – точка на стороне AB треугольника ABC, причем $AX : XB = \alpha$. Точка Y находится на прямой CX. Докажите, что $S_{CAY} : S_{CBY} = \alpha$.

2. Докажите, что три медианы делят треугольник на шесть частей одинаковой площади.

3. Докажите, что площадь треугольника равна pr, где p — полупериметр треугольника, а r — радиус его вписанной окружности.

4. На продолжениях сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ соответственно за точки B, C, D, A отложены отрезки BB_1, CC_1, DD_1 и AA_1, равные этим сторонам. Найдите площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна S.

5. **а)** Площадь четырехугольника равна S. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон четырехугольника.
б) Средние линии выпуклого четырёхугольника (прямые, соединяющие середины противоположных сторон) делят его на 4 четырёхугольника. Докажите, что суммы площадей несмежных четырёхугольников равны.

6. Пусть M и N — середины противоположных сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки AM и BN пересекаются в точке P, а отрезки DM и CN — в точке Q. Докажите, что сумма площадей треугольников APB и CQD равна площади четырехугольника $MPNQ$.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась такая точка P, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

8. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Прямая, проходящая через точку O и середину стороны BC, пересекает сторону AD точке M. Докажите, что $AM : MD = S_{ABO} : S_{CDO}$.