

## Площадь

1. Пусть  $X$  – точка на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$ , причем  $AX : XB = \alpha$ . Точка  $Y$  находится на прямой  $CX$ . Докажите, что  $S_{CAU} : S_{CBY} = \alpha$ .
2. Докажите, что три медианы делят треугольник на шесть частей одинаковой площади.
3. Докажите, что площадь треугольника равна  $pr$ , где  $p$  — полупериметр треугольника, а  $r$  — радиус его вписанной окружности.
4. На продолжениях сторон  $AB, BC, CD$  и  $DA$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  соответственно за точки  $B, C, D, A$  отложены отрезки  $BB_1, CC_1, DD_1$  и  $AA_1$ , равные этим сторонам. Найдите площадь четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$ , если площадь четырехугольника  $ABCD$  равна  $S$ .
5. а) Площадь четырехугольника равна  $S$ . Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон четырехугольника.  
б) Средние линии выпуклого четырёхугольника (прямые, соединяющие середины противоположных сторон) делят его на 4 четырёхугольника. Докажите, что суммы площадей несмежных четырёхугольников равны.
6. Пусть  $M$  и  $N$  — середины противоположных сторон  $BC$  и  $AD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , отрезки  $AM$  и  $BN$  пересекаются в точке  $P$ , а отрезки  $DM$  и  $CN$  — в точке  $Q$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $APB$  и  $CQD$  равна площади четырехугольника  $MPNQ$ .
7. Диагонали четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Прямая, проходящая через точку  $O$  и середину стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AD$  в точке  $M$ . Докажите, что  $AM : MD = S_{ABO} : S_{CDO}$ .
8. Каждая из сторон четырёхугольника разбита на три одинаковые части, и соответствующие точки соединены отрезками. Докажите, что площадь серого четырёхугольника составляет  $\frac{1}{9}$  от площади четырёхугольника

