

Планарные графы

Определение. Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости без пересечений рёбер. Области, на которые граф разбивает плоскость, называются *гранями*. Неограниченная часть плоскости — тоже грань, которую называют *внешней гранью*.

Обозначения: V – число вершин, E – число рёбер, F – число граней.

Все графы далее в этом листке не имеют петель и кратных рёбер.

1. Докажите, что двудольный граф, в котором одна из долей состоит из двух вершин, является планарным.
2. **(а)** Докажите, что в любом связном графе, не являющемся деревом, найдётся ребро, при удалении которого граф остаётся связным.
(б) Формула Эйлера. Для любого связного планарного графа выполнено $V - E + F = 2$.
3. Для любого связного планарного графа с хотя бы тремя вершинами докажите неравенство **(а)** $3F \leq 2E$; **(б)** $E \leq 3V - 6$.
4. Можно ли рёбра полного графа на 11 вершинах покрасить в два цвета так, чтобы рёбра каждого цвета образовывали планарный граф?
5. Докажите, что в любом планарном графе найдётся вершина степени 5 или меньше.
6. Карта материка разделена на страны по некоторым линиям (можно считать, ломаным). Каждая страна представлена одним связным куском. Докажите, что можно составить 6 альянсов из этих стран так, чтобы страны из одного альянса не являлись соседями.
7. Фуллерен — это граф, все степени вершин которого равны 3, а все грани — это пяти- и шестиугольники (например, футбольный мяч). Найдите количество пятиугольных граней у фуллеренов.
8. В планарном графе все вершины имеют степень 4, а также есть ровно m треугольных граней. Найдите наименьшее возможное значение m .