

## Планарные графы

**Определение.** Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости без пересечений рёбер. Области, на которые граф разбивает плоскость, называются *гранями*. Неограниченная часть плоскости — тоже грань, которую называют *внешней гранью*.

По умолчанию все графы в этом листке не имеют петель и кратных рёбер.

Обозначения:  $V$  – число вершин,  $E$  – число рёбер,  $F$  – число граней.

- (а)** Докажите, что в любом связном графе, не являющемся деревом, найдётся ребро, при удалении которого граф остаётся связным.  
**(б) Формула Эйлера.** Для любого связного планарного графа выполнено  $V - E + F = 2$ .
- Для любого связного планарного графа с хотя бы тремя вершинами докажите неравенство **(а)**  $3F \leq 2E$ ; **(б)**  $E \leq 3V - 6$ .
- Можно ли рёбра полного графа на 11 вершинах покрасить в два цвета так, чтобы рёбра каждого цвета образовывали планарный граф?
- Докажите, что в любом планарном графе найдётся вершина степени 5 или меньше.
- Карта материка разделена на страны по некоторым линиям (можно считать, ломаными). Каждая страна представлена одним связным куском. Докажите, что можно составить 6 альянсов из этих стран так, чтобы страны из одного альянса не являлись соседями.
- Фуллерен — это граф, все степени вершин которого равны 3, а все грани — это пяти- и шестиугольники (например, футбольный мяч). Найдите количество пятиугольных граней у фуллеренов.
- В планарном графе все вершины имеют степень 4, а также есть ровно  $m$  треугольных граней. Найдите наименьшее возможное значение  $m$ .
- Можно ли разбить правильный треугольник на выпуклые **(а)** 5-угольники; **(б)** 6-угольники?