Телескопические суммы

Предположим, мы хотим найти сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Нельзя ли представить a_k в виде $b_{k+1} - b_k$?

1. **(а)** Найдите сумму
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!.$$

(б) Найдите значение выражения
$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{2023}{2024!}.$$

2. **(а)** Даны различные вещественные числа a, b. Докажите, что найдутся вещественные числа A и B, удовлетворяющие равенству
$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$
при всех $x \neq a, b$.

(б) Для натурального n найдите сумму
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}.$$

(в) Найдите сумму
$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{2022 \cdot 2024}.$$

3. Найдите сумму
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

4. Для каждого натурального числа n положим
$$p(n) = \frac{(-3)^n}{3^n + 3^{17}}.$$
Найдите $p(1) + p(2) + \ldots + p(33)$.

5. **(а)** Дано натуральное число n. Найдите сумму
$$1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ цифр}}.$$

Определение. Назовём последовательность вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ *арифметико-геометрической*, если она удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$x_{k+1} = qx_k + d$$

для некоторых вещественных чисел q, d.

6. **(а)** Докажите, что ко всем членам арифметико-геометрической последовательности можно добавить одно и то же вещественное число так, чтобы последовательность стала геометрической.

(б) Известно, что $x_1 = 1$ и $x_{k+1} = 4x_k + 1$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$. Найдите $x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

7. Для вещественного числа q найдите сумму $1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1}$.