

Телескопические суммы

Предположим, мы хотим найти сумму $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Нельзя ли представить a_k в виде $b_{k+1} - b_k$?

1. (а) Найдите сумму

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!.$$

- (б) Найдите значение выражения

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2023}{2024!}.$$

2. (а) Для натурального n найдите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}.$$

- (б) Найдите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2022 \cdot 2024}.$$

3. Найдите сумму

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

4. (а) Дано натуральное число n . Найдите сумму

$$1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots 1}_{n \text{ цифр}}.$$

- (б) Даны вещественные числа a, q, d . Последовательность x_1, x_2, \dots, x_n задана соотношениями

$$x_1 = a, \quad x_{k+1} = qx_k + d \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Найдите сумму $x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

5. Для вещественного числа q найдите сумму $1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1}$.

6. Найдите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n-2) \cdot (n-1) \cdot n}.$$

7. Пусть

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2021 \cdot 2022}, \quad B = \frac{1}{1012 \cdot 2022} + \frac{1}{1013 \cdot 2021} + \dots + \frac{1}{2022 \cdot 1012}.$$

Докажите, что A/B — целое число.