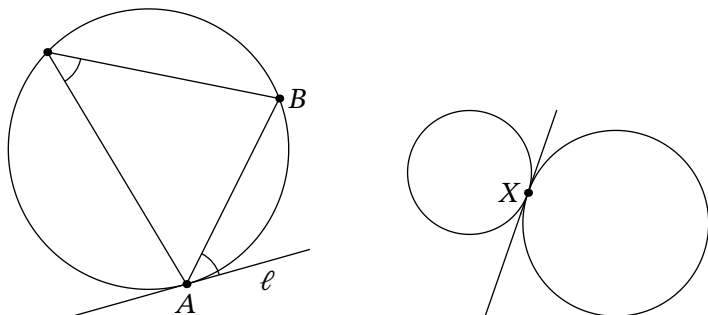


## Касательная к окружности

**Теорема 1.** Пусть на окружности  $\omega$  отмечены точки  $A$  и  $B$ , а также через точку  $A$  проведена прямая  $\ell$ . Тогда  $\ell$  касается  $\omega$  тогда и только тогда, когда угол между  $\ell$  и хордой  $AB$  равен половине градусной меры дуги  $AB$ , лежащей внутри этого угла.

**Теорема 2.** Пусть две окружности имеют общую точку  $X$ . Тогда они касаются в этой точке тогда и только тогда, когда у них общая касательная в точке  $X$ .



1. Касательная к описанной окружности неравностороннего треугольника  $ABC$ , восстановленная в вершине  $A$ , пересекает прямую  $BC$  в точке  $S$ ; точка  $L$  — основание биссектрисы  $AL$  треугольника. Докажите, что  $SA = SL$ .
2. Биссектрисы углов  $B$  и  $C$  остроугольного неравностороннего треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $I$  и пересекают высоту из вершины  $A$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что прямая  $AI$  касается описанной окружности треугольника  $IPQ$ .
3. Прямая  $PA$  касается описанной окружности треугольника  $ABC$ . Точки  $C_1$  и  $B_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из  $P$  на прямые  $AB$ ,  $AC$ . Докажите, что  $BC \perp B_1C_1$ .
4. Окружность  $\omega$  касается прямой  $\ell$ . Две другие окружности касаются прямой  $\ell$  в точках  $A$  и  $B$  и окружности  $\omega$  внешним образом в точках  $C$  и  $D$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  лежат на одной окружности.
5. Точка  $H$  — ортоцентр остроугольного треугольника  $ABC$ . Касательные к описанным окружностям треугольников  $AHB$  и  $AHC$ , восстановленные в точке  $H$ , пересекают прямую  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Докажите, что  $XH = YH$ .
6. На стороне  $AB$  остроугольного равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = AC$ ) отмечена точка  $X$ . Касательная к описанной окружности треугольника  $BXC$ , восстановленная в вершине  $X$ , пересекает описанную окружность треугольника  $ACX$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что  $AY \parallel BC$ .
7. **Лемма Архимеда.** Окружность  $\omega$  касается хорды  $MN$  окружности  $\Omega$  в точке  $B$ , а окружности  $\Omega$  в точке  $A$ . Докажите, что  $AB$  является биссектрисой угла  $MAN$ .

8. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ ,  $\angle BAC = 90^\circ$ . На «меньших» дугах  $AB$  и  $AC$  его описанной окружности отмечены точки  $C_0$  и  $B_0$  соответственно. Отрезок  $BB_0$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $B_1$ ; отрезок  $CC_0$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $C_1$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $AB_1B_0$  и  $AC_1C_0$  касаются.