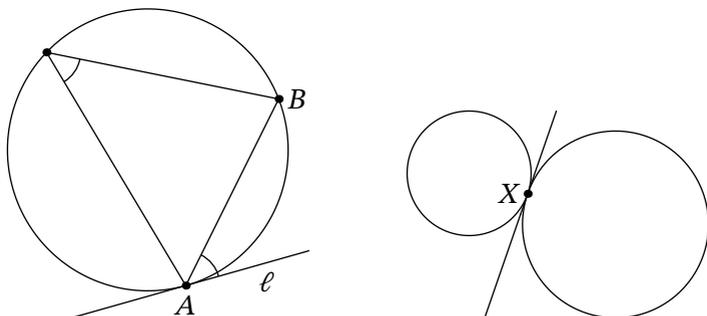


Касательная к окружности

Теорема 1. Пусть на окружности ω отмечены точки A и B , а также через точку A проведена прямая ℓ . Тогда ℓ касается ω тогда и только тогда, когда угол между ℓ и хордой AB равен половине градусной меры дуги AB , лежащей внутри этого угла.

Теорема 2. Пусть две окружности имеют общую точку X . Тогда они касаются в этой точке тогда и только тогда, когда у них общая касательная в точке X .



1. Касательная к описанной окружности неравностороннего треугольника ABC , восстановленная в вершине A , пересекает прямую BC в точке S ; точка L — основание биссектрисы AL треугольника. Докажите, что $SA = SL$.
2. Биссектрисы углов B и C остроугольного неравностороннего треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают высоту из вершины A в точках P и Q . Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника IPQ .
3. Прямая PA касается описанной окружности треугольника ABC . Точки C_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из P на прямые AB , AC . Докажите, что $BC \perp B_1C_1$.
4. Окружность ω касается прямой ℓ . Две другие окружности касаются прямой ℓ в точках A и B и окружности ω внешним образом в точках C и D . Докажите, что точки A , B , C , D лежат на одной окружности.
5. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC . Касательные к описанным окружностям треугольников AHB и AHC , восстановленные в точке H , пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $XH = YH$.
6. На стороне AB остроугольного равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечена точка X . Касательная к описанной окружности треугольника BXC , восстановленная в вершине X , пересекает описанную окружность треугольника ACX в точках X и Y . Докажите, что $AY \parallel BC$.
7. **Лемма Архимеда.** Окружность ω касается хорды MN окружности Ω в точке B , а окружности Ω в точке A . Докажите, что AB является биссектрисой угла MAN .

8. Дан прямоугольный треугольник ABC , $\angle BAC = 90^\circ$. На «меньших» дугах AB и AC его описанной окружности отмечены точки C_0 и B_0 соответственно. Отрезок BB_0 пересекает сторону AC в точке B_1 ; отрезок CC_0 пересекает сторону AB в точке C_1 . Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1B_0 и AC_1C_0 касаются.