

Касательная к окружности. Добавка

1. Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC$; O, I — центры его описанной и вписанной окружностей соответственно. Окружность ω описана вокруг треугольника BIO и пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D . Докажите, что AD — касательная к ω .
2. Серединный перпендикуляр к биссектрисе BL треугольника ABC пересекает биссектрисы его внешних углов A и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PBQ , касается окружности, описанной около треугольника ABC .
3. (*Заключительный этап ВсОШ-2017, задача 10.2*) Пусть O — центр описанной окружности остроугольного равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Прямые BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через C' параллельно AC , касается описанной окружности треугольника $B'OC$.
4. Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC . Окружность, проходящая через точку A и касающаяся биссектрисы в точке D , вторично пересекает прямую AC в точке A_1 . Окружность, проходящая через точку B и касающаяся биссектрисы в точке D , вторично пересекает прямую BC в точке B_1 . Докажите, что окружность, симметричная описанной около треугольника A_1B_1C относительно CD , касается AB .