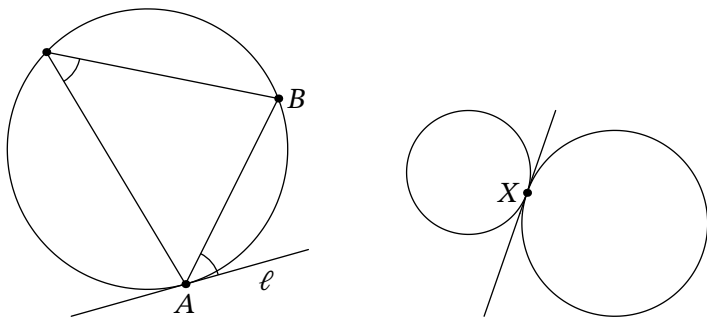


Касательная к окружности

Теорема 1. Пусть на окружности ω отмечены точки A и B , а также через точку A проведена прямая ℓ . Тогда ℓ касается ω тогда и только тогда, когда угол между ℓ и хордой AB равен половине градусной меры дуги AB , лежащей внутри этого угла.

Теорема 2. Пусть две окружности имеют общую точку X . Тогда они касаются в этой точке тогда и только тогда, когда у них общая касательная в точке X .



1. Касательная к описанной окружности неравностороннего треугольника ABC , восстановленная в вершине A , пересекает прямую BC в точке S ; точка L — основание биссектрисы AL треугольника. Докажите, что $SA = SL$.
2. Биссектрисы углов B и C остроугольного неравностороннего треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают высоту из вершины A в точках P и Q . Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника IPQ .
3. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC . Касательные к описанным окружностям треугольников AHB и AHC , восстановленные в точке H , пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $XH = YH$.
4. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . Прямая, проходящая через точку P и перпендикулярная PD , пересекает прямую AD в точке D_1 ; аналогично определяется точка A_1 . Докажите, что касательная, проведенная в точке P к описанной окружности треугольника D_1PA_1 , параллельна прямой BC .
5. **Лемма Архимеда.** Окружность ω касается хорды MN окружности Ω в точке B , а окружности Ω в точке A . Докажите, что AB является биссектрисой угла MAN .
6. Дан прямоугольный треугольник ABC , $\angle BAC = 90^\circ$. На «меньших» дугах AB и AC его описанной окружности отмечены точки C_0 и B_0 соответственно. Отрезок BB_0 пересекает сторону AC в точке B_1 ; отрезок CC_0 пересекает сторону AB в точке C_1 . Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1B_0 и AC_1C_0 касаются.
7. Точка P внутри треугольника ABC такова, что $\angle PCB = \angle PAC$ и $\angle PBC = \angle PAB$. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников PAC и

PAB касаются.

8. В треугольнике ABC угол A равен 60° . Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC , соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников ADE и BOC касаются.