

Ориентированные графы

1. В некотором государстве 101 город. Каждый город соединён с некоторыми из остальных одной дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из каждого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам.
2. В некоторой стране есть столица и ещё 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.
3. В ориентированном графе нет циклов.
 - (а) Докажите, что найдётся вершина, в которую не ведёт ни одно ребро.
 - (б) Докажите, что его вершины можно занумеровать так, что рёбра ведут из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером.

Определение. Пару вершин u, v ориентированного графа будем называть *связанной*, если существуют путь из v в u и путь из u в v .

Определение. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если любая пара вершин является связанной.

4. Докажите, что любой ориентированный граф можно разбить на части (которые далее мы будем называть *компонентами сильной связности*) так, что пара вершин u, v связана, если и только если они находятся в одной компоненте сильной связности.
5. Докажите, что если вершины u, v лежат в одной компоненте сильной связности, то любой путь из u в v проходит по вершинам той же компоненты сильной связности.
6. Докажите, что компоненты сильной связности ориентированного графа можно пронумеровать так, чтобы стрелки между компонентами вели из компонент с меньшим номером в компоненты с большим.
7. В государстве $n > 2$ городов, любые 2 города соединены односторонней автомобильной дорогой. Докажите, что можно изменить направление движения не более чем на одной дороге так, чтобы из любого города можно было добраться до любого другого.