

Ориентированные графы. Добавка

1. В стране 1001 город, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Из каждого города выходит ровно 500 дорог, в каждый город входит ровно 500 дорог. От страны отделилась независимая республика, в которую вошли 668 городов. Докажите, что из любого города этой республики можно добраться до любого другого, не выезжая за пределы республики.
2. Докажите, что в любом полном сильно связном графе можно найти ориентированный цикл **(а)** длины 3; **(б)** проходящий через каждую вершину ровно 1 раз.
3. Дан полный сильно связный граф на $n > 3$ вершинах. Докажите, что найдется вершина, при удалении которой граф остаётся сильно связным.
4. Докажите, что в сильно связном графе на n вершинах можно стереть все ребра кроме $2n - 2$ так, чтобы оставшийся граф был сильно связным.