

## Сильная связность

### Теория

**Определение.** Пару вершин  $u, v$  ориентированного графа будем называть *связанной*, если существуют путь из  $v$  в  $u$  и путь из  $u$  в  $v$ .

**Определение.** Ориентированный граф называется *сильно связным*, если любая пара вершин является связанной.

1. Докажите, что любой ориентированный граф можно разбить на части (которые далее мы будем называть *компонентами сильной связности*) так, что пара вершин  $u, v$  связана, если и только если они находятся в одной компоненте сильной связности.
2. Докажите, что если вершины  $u, v$  лежат в одной компоненте сильной связности, то любой путь из  $u$  в  $v$  проходит по вершинам той же компоненты сильной связности.
3. Докажите, что компоненты сильной связности ориентированного графа можно пронумеровать так, чтобы стрелки между компонентами вели из компонент с меньшим номером в компоненты с большим.

### Задачи

4. Докажите, что в любом сильно связном графе на  $n$  вершинах хотя бы  $n$  рёбер.
5. В государстве  $n > 2$  городов, любые 2 города соединены односторонней автомобильной дорогой. Докажите, что можно изменить направление движения не более чем на одной дороге так, чтобы из любого города можно было добраться до любого другого.
6. Докажите, что в любом полном сильно связном графе можно найти ориентированный цикл **(а)** длины 3; **(б)** проходящий через каждую вершину ровно 1 раз.
7. Дан полный сильно связный граф на  $n > 3$  вершинах. Докажите, что найдется вершина, при удалении которой граф остаётся сильно связным.