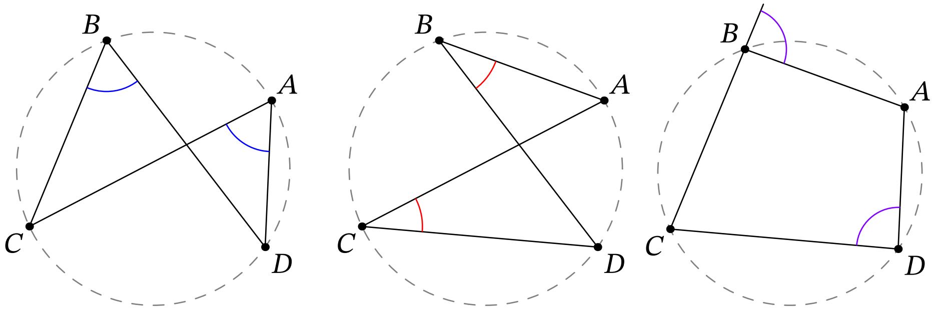
Критерии вписанности четырёхугольника

Теорема. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из эквивалентных условий:

(1) $\angle CAD = \angle CBD$; **(2)** $\angle ABD = \angle ACD$; **(3)** $\angle ABC + \angle ADC = 180°$;



1. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отметили точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1C_1, BA_1C_1 и CA_1B_1 пересекаются в одной точке.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, точка K — середина *«меньшей»* дуги AB (т. е. не содержащей точек C и D). Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB, DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.

3. На хорде AB окружности Ω с центром в точке O отмечена точка X. Описанная окружность треугольника AXO пересекает окружность Ω в точках A и Y, причём точки O и Y лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что $XY = XB$.

4. В окружность с центром в точке O вписана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Диагонали трапеции пересекаются в точке K. Докажите, что точки A, B, K, O лежат на одной окружности.

5. В остроугольном треугольнике ABC на высоте, проведённой из вершины C, выбрана точка X. Пусть A_1 и B_1 — основания перпендикуляров из точки X на стороны AC и BC соответственно. Докажите, что точки A, B, B_1, A_1 лежат на одной окружности.

6. В остроугольном треугольнике ABC известно, что $\angle A = 60°$. Докажите, что окружность, проходящая через ортоцентр, центр описанной окружности и центр вписанной окружности треугольника ABC, содержит центр одной из вневписанных окружностей треугольника ABC.

7. Прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность. Из произвольной точки P «малой» дуги AB опущены перпендикуляры PI, PQ, PR на AB, AC, BD соответственно. Докажите, что I — центр вписанной окружности треугольника PQR.

8. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника ADB, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ADC, пересекает сторону AB в точке N ($M, N \neq A$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника AMN. Докажите, что $OD \perp BC$.