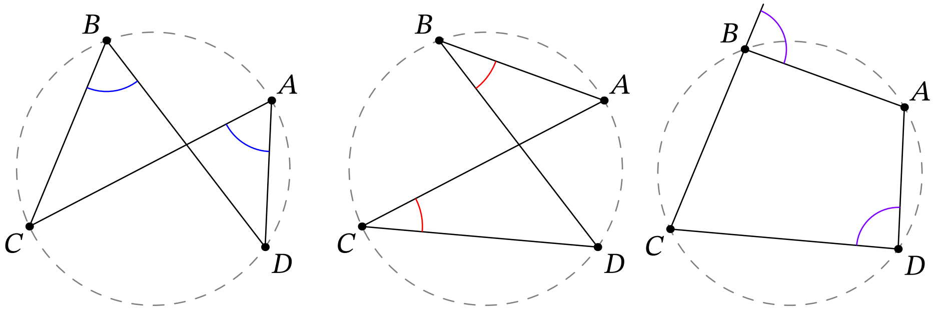
**[ЦПМ, кружок по математике, 8 класс]**

[*2024–2025 уч. г.*] группа 8-1 *8 октября 2024 г.*

# Критерии вписанности четырёхугольника

**Теорема.** Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из эквивалентных условий:

**(1)** $\angle CAD = \angle CBD$; **(2)** $\angle ABD = \angle ACD$; **(3)** $\angle ABC + \angle ADC = 180°$;




1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, точка $K$ — середина *«меньшей»* дуги $AB$ (т. е. не содержащей точек $C$ и $D$). Пусть $P$ и $Q$ — точки пересечения пар хорд $CK$ и $AB$, $DK$ и $AB$ соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.

2. На хорде $AB$ окружности $\Omega$ с центром в точке $O$ отмечена точка $X$. Описанная окружность треугольника $AXO$ пересекает окружность $\Omega$ в точках $A$ и $Y$, причём точки $O$ и $Y$ лежат по разные стороны от прямой $AB$. Докажите, что $XY = XB$.

3. В окружность с центром в точке $O$ вписана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Диагонали трапеции пересекаются в точке $K$. Докажите, что точки $A$, $B$, $K$, $O$ лежат на одной окружности.

4. В остроугольном треугольнике $ABC$ известно, что $\angle A = 60°$. Докажите, что окружность, проходящая через ортоцентр, центр описанной окружности и центр вписанной окружности треугольника $ABC$, содержит центр одной из вневписанных окружностей треугольника $ABC$.

5. Прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность. Из произвольной точки $P$ «малой» дуги $AB$ опущены перпендикуляры $PI$, $PQ$, $PR$ на $AB$, $AC$, $BD$ соответственно. Докажите, что $I$ — центр вписанной окружности треугольника $PQR$.

6. На стороне $BC$ треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. Окружность, описанная около треугольника $ADB$, пересекает сторону $AC$ в точке $M$, а окружность, описанная около треугольника $ADC$, пересекает сторону $AB$ в точке $N$ ($M, N \neq A$). Пусть $O$ — центр описанной окружности треугольника $AMN$. Докажите, что $OD \perp BC$.

7. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$ и $CC_1$. Прямая, проходящая через центры окружностей, вписанных в треугольники $AA_1C$ и $CC_1A$, пересекают стороны $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. Докажите,

что $BX = BY$.