

## Транснеравенство

**Транснеравенство.** Даны вещественные числа  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  и  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . Пусть  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — некоторая перестановка чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Тогда

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

1. (а) Докажите транснеравенство для случая  $n = 2$ : если  $a_1 \geq a_2$  и  $b_1 \geq b_2$ , то

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

(б) Используя результат пункта (а), докажите левую часть транснеравенства для произвольного натурального  $n$ .

(в) Докажите правую часть транснеравенства для произвольного натурального  $n$ .

2. Даны положительные числа  $a, b, c$ .

(а) Докажите, что  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ .

(б) Докажите, что  $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 b + b^3 c + c^3 a$ .

(в) Докажите, что  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$ .

3. Для положительных чисел  $x, y, z$  докажите неравенство

$$x + y + z \geq \frac{x(y+1)}{x+1} + \frac{y(z+1)}{y+1} + \frac{z(x+1)}{z+1}.$$

4. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — различные натуральные числа. Докажите, что

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

5. Для положительных чисел  $a, b, c$  докажите неравенство

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geq \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}.$$

6. **Неравенство Несбитта.** Даны положительные числа  $a, b, c$ . Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2}.$$