

## Транснеравенство

**Транснеравенство.** Даны вещественные числа  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  и  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . Пусть  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — некоторая перестановка чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Тогда

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

1. (а) Докажите транснеравенство для  $n = 2$ ;

(б) Используя результат предыдущего пункта, докажите транснеравенство для произвольного натурального  $n$ .

2. Даны вещественные числа  $a, b, c$ . Докажите, что  $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 b + b^3 c + c^3 a$ .

3. Даны положительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Докажите неравенство

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

4. Для положительных чисел  $x, y, z$  докажите неравенство

$$x + y + z \geq \frac{x(y+1)}{x+1} + \frac{y(z+1)}{y+1} + \frac{z(x+1)}{z+1}.$$

5. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — различные натуральные числа. Докажите, что

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

6. **Неравенство Несбитта.** Даны положительные числа  $a, b, c$ . Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2}.$$

7. **Неравенство Чебышёва.** Даны два набора вещественных чисел  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  и  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . Докажите неравенство

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$