

Разнобой 2024.10.01

1. Дан равнобедренный треугольник ABC . На продолжениях основания AC за точки A и C выбраны точки D и E соответственно. На продолжении CB за точку B выбрана точка F . Известно, что $AD = BF$ и $CE = CF$. Докажите, что $BD + CF > EF$.
2. Для натурального числа $n > 1$ обозначим $L(n)$ наибольший натуральный делитель числа n , который не равен n . Например, $L(12) = 6, L(5) = 1$. Положим также $L(1) = L(0) = 0$. Найдите все натуральные n , для которых

$$n + L(n) + L(L(n)) + \dots + \underbrace{L(\dots L(n) \dots)}_{n \text{ раз}} = 1035.$$

3. В вершинах связного графа можно так расставить натуральные числа, не превосходящие n , чтобы в вершинах, соединённых ребром, всегда стояли разные числа. Докажите, что это можно сделать так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь, состоящий из рёбер, у которых числа в концах отличаются ровно на 1 или ровно на $n - 1$.
4. По n коробкам как-то разложены n^2 конфет. За один ход можно взять две коробки, содержащие суммарно чётное число конфет, и разложить эти конфеты поровну в эти коробки. При каких натуральных n за несколько ходов заведомо можно разложить конфеты поровну по всем n коробкам?