Раскраски графов

Раскраска вершин графа в несколько цветов называется *правильной*, если никакие две вершины одного цвета не соединены ребром.

1. **(а)** Докажите, что вершины графа, в котором степень каждой вершины не более k, можно раскрасить в $k+1$ цвет так, чтобы не было двух одноцветных вершин, соединённых ребром.
(б) Докажите, что вершины графа, в котором степень каждой вершины не более k, можно раскрасить в k^2-k+1 цвет так, чтобы ни у какой вершины не было двух одноцветных соседей.

2. Дан граф на n пронумерованных вершинах. Известно, что его можно правильно покрасить в 11 цветов единственным (с точностью до перенумерации цветов) образом. Докажите, что в нём не менее $5n$ рёбер.

3. Дан граф на 1000 вершинах, степени всех вершин которого не превосходят 10. Докажите, что на его рёбрах можно расставить стрелки, чтобы каждый простой путь содержал не более 10 рёбер.

4. В графе 1000 вершин, причём степень каждой не больше 9. Докажите, что можно выбрать такой подграф на 200 вершинах, что в нем не будет нечётных циклов.

5. Вершины графа нельзя раскрасить правильным образом в d цветов. Докажите, что можно выбрать несколько вершин в этом графе, чтобы каждая из выбранных была соединена хотя бы с d из выбранных.

6. Докажите, что ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более d рёбер, можно правильно раскрасить в $2d+1$ цвет.

7. Дан связный граф. Известно, что как ни покрась его вершины в n цветов, найдётся ребро с концами одного цвета. Докажите, что можно так удалить $\frac{n(n-1)}{2}$ рёбер, чтобы граф остался связным.