

## Раскраски графов

Раскраска вершин графа в несколько цветов называется *правильной*, если никакие две вершины одного цвета не соединены ребром.

- (а) Докажите, что вершины графа, в котором степень каждой вершины не более  $k$ , можно раскрасить в  $k + 1$  цвет так, чтобы не было двух одноцветных вершин, соединённых ребром.

(б) Докажите, что вершины графа, в котором степень каждой вершины не более  $k$ , можно раскрасить в  $k^2 - k + 1$  цвет так, чтобы ни у какой вершины не было двух одноцветных соседей.
- Дан граф на 1000 вершинах, степени всех вершин которого не превосходят 10. Докажите, что на его рёбрах можно расставить стрелки, чтобы каждый простой путь содержал не более 10 рёбер.
- В графе 1000 вершин, причём степень каждой не больше 9. Докажите, что можно выбрать такой подграф на 200 вершинах, что в нём не будет нечётных циклов.
- Вершины графа нельзя раскрасить правильным образом в  $d$  цветов. Докажите, что можно выбрать несколько вершин в этом графе, чтобы каждая из выбранных была соединена хотя бы с  $d$  из выбранных.
- Докажите, что ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более  $d$  рёбер, можно правильно раскрасить в  $2d + 1$  цвет.
- Дан связный граф. Известно, что как ни покрась его вершины в  $n$  цветов, найдётся ребро с концами одного цвета. Докажите, что можно так удалить  $\frac{n(n-1)}{2}$  рёбер, чтобы граф остался связным.
- В некотором графе нет простого пути из 100 рёбер. Докажите, что его вершины можно покрасить в 100 цветов правильным образом.