

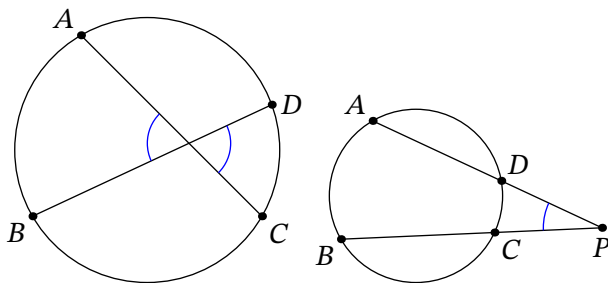
Меры дуг окружности и вписанные углы

Определения. Предположим, что на окружности Ω с центром в точке O отмечены точки A и B . Рассмотрим дугу \widehat{AB} . *Мерой* дуги \widehat{AB} назовём величину *центрального* угла $\angle AOB$ (центральный угол может быть больше 180° ; вся дуга должна быть внутри центрального угла). Для произвольной точки X окружности Ω вне дуги \widehat{AB} угол $\angle AXB$ будет называться *вписанным* углом, опирающимся на дугу \widehat{AB} .

Теорема. Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.

Отныне и навсегда под «меньшей» дугой \widehat{XY} мы будем понимать ту из двух возможных дуг \widehat{XY} , которая не содержит других отмеченных точек; вторую дугу \widehat{XY} будем называть «большей».

1. Точки M и N — середины «меньшей» и «большей» дуг BC описанной окружности неравностороннего треугольника ABC соответственно. Докажите, что (а) прямая AM — биссектриса угла BAC ; (б) прямая AN — биссектриса внешнего угла BAC .
2. (Невероятно полезная задача) (а) Докажите, что величина отмеченного угла на первой картинке равна полусумме мер «меньших» дуг \widehat{AB} и \widehat{CD} . (б) Докажите, что величина отмеченного угла на второй картинке равна полуразности мер «меньших» дуг \widehat{AB} и \widehat{CD} .



3. На окружности в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D . Точки K, L, M, N — середины «меньших» дуг $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$ соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.
4. Точка D симметрична вершине A остроугольного треугольника ABC относительно прямой BC . Отрезки BD, CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q . Докажите, что прямая AD — биссектриса угла PAQ .
5. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка S , что

$$\angle BSC = \angle BAC + 60^\circ, \angle CSA = \angle CBA + 60^\circ, \angle ASB = \angle ACB + 60^\circ.$$

Лучи AS, BS, CS продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC . Докажите, что полученные точки пересечения лежат в вершинах равностороннего треугольника.

6. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$ без параллельных сторон. Его вершины разбивают окружность на четыре дуги. Рассматриваются восемь прямых: две прямые, соединяющие середины противоположных дуг; две биссектрисы угла между прямыми AC и BD ; две биссектрисы угла между прямыми AB и CD ; две биссектрисы угла между прямыми AD и BC . Докажите, что эти восемь прямых можно раскрасить в красный и в синий цвета так, чтобы одноцветные прямые были параллельны.