# Меры дуг окружности и вписанные углы

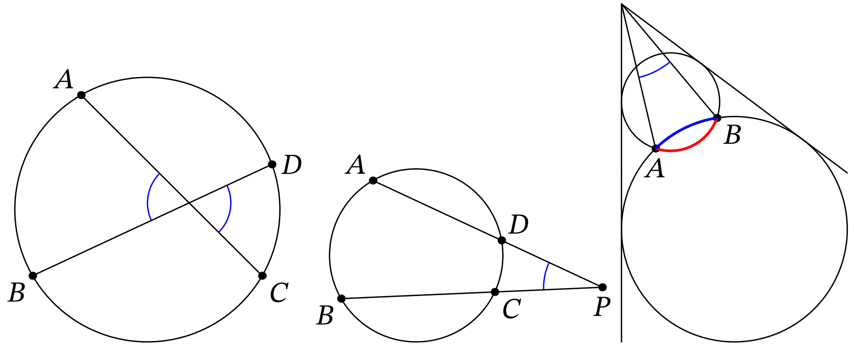
**Определения.** Предположим, что на окружности $\Omega$ с центром в точке $O$ отмечены точки $A$ и $B$. Рассмотрим дугу $\overset{\frown}{AB}$. *Мерой* дуги $\overset{\frown}{AB}$ назовём величину *центрального* угла $AOB$ (центральный угол может быть больше $180°$; вся дуга должна быть внутри центрального угла). Для произвольной точки $X$ окружности $\Omega$ вне дуги $\overset{\frown}{AB}$ угол $AXB$ будет называть *вписанным* углом, опирающимся на дугу $\overset{\frown}{AB}$.

**Теорема.** Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.

Отныне и навсегда под «меньшей» дугой $\overset{\frown}{XY}$ мы будем понимать ту из двух возможных дуг $\overset{\frown}{XY}$, которая не содержит других отмеченных точек; вторую дугу $\overset{\frown}{XY}$ будем называть «бóльшей».

1. Точки $M$ и $N$ — середины «меньшей» и «большей» дуг $BC$ описанной окружности неравнобедренного треугольника $ABC$ соответственно. Докажите, что **(а)** прямая $AM$ — биссектриса угла $BAC$; **(б)** прямая $AN$ — биссектриса внешнего угла $BAC$.

2. (*Невероятно полезная задача*) **(а)** Докажите, что величина отмеченного угла на первой картинке равна полусумме мер «меньших» дуг $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$. **(б)** Докажите, что величина отмеченного угла на второй картинке равна полуразности мер «меньших» дуг $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$. **(в)** Докажите, что величина отмеченного угла на третьей картинке равна полуразности мер «меньших» дуг $\overset{\frown}{AB}$ двух пересекающихся окружностей.




3. На окружности в указанном порядке отмечены точки $A$, $B$, $C$, $D$. Точки $K$, $L$, $M$, $N$ — середины «меньших» дуг $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$ соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.

4. Точка $D$ симметрична вершине $A$ остроугольного треугольника $ABC$ относительно прямой $BC$. Отрезки $BD$, $CD$ пересекают описанную окружность треугольника $ABC$ в точках $P$ и $Q$. Докажите, что прямая $AD$ — биссектриса угла $PAQ$.

5. Внутри остроугольного треугольника $ABC$ нашлась такая точка $S$, что
$$\angle BSC = \angle BAC + 60°, \angle CSA = \angle CBA + 60°, \angle ASB = \angle ACB + 60°.$$
Лучи $AS$, $BS$, $CS$ продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника $ABC$. Докажите, что полученные точки пересечения лежат в вершинах равностороннего треугольника.

6. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$ без параллельных сторон. Его вершины разбивают окружность на четыре дуги. Рассматриваются восемь прямых: две прямые, соединяющие середины противоположных дуг; две биссектрисы угла между прямыми $AC$ и $BD$; две биссектрисы угла между прямыми $AB$ и $CD$; две биссектрисы угла между прямыми $AD$ и $BC$. Докажите, что эти восемь прямых можно раскрасить в красный и в синий цвета так, чтобы одноцветные прямые были параллельны.

7. Точка $E$ — проекция вершины $C$ прямоугольника $ABCD$ на диагональ $BD$. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников $AEB$ и $AED$, пересекаются на окружности, описанной около треугольника $AEC$.