Степени вхождения простых

Определение. Степенью вхождения простого числа p в целое число n называется такое наибольшее целое число k, что n делится на p^k. Обозначим это число $\nu_p(n)$.

Свойства. Для любых целых чисел a, b выполнено

- $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$;
- $\nu_p(a+b) \geqslant \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$. Если $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, то $\nu_p(a+b) = \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$.

1. Даны натуральные числа x, y, z. Оказалось, что число xy^4z^7 является кубом натурального числа. Докажите, что число x^4y^7z также является кубом натурального числа.

2. Натуральные числа a и b таковы, что сумма

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$$

является целым числом. Докажите, что обе дроби $\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}$ — целые.

3. Будем говорить, что натуральное число является *неординарным*, если все его простые делители меньше 30. Лена выписала на доску 1111 неординарных чисел. Докажите, что среди них найдутся два, дающих в произведении точный квадрат.

4. Даны натуральные числа a и b. Выяснилось, что число $a^7 + b^7 + b$ делится на ab. Докажите, что b является седьмой степенью некоторого натурального числа.

5. **(а) Формула Лежандра.** Даны натуральное число n и простое число p. Докажите равенство

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots .$$

(б) Используя формулу Лежандра, докажите, что число

$$\frac{(a+b)!}{a! \cdot b!}$$

является целым для любых натуральных a и b.

(в) Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что число

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_n!}$$

является целым.

6. Ваня задумал натуральное число n и выписал на доску произведение

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Эмоциональный Артемий хочет поставить после некоторых множителей восклицательный знак (заменив таким образом множитель k на $k!$) так, чтобы результат произведения оказался точным квадратом. При каких значениях n Артемию удастся осуществить задуманное?