Степени вхождения простых

Определение. Степенью вхождения простого числа p в целое число n называется такое наибольшее целое число k, что n делится на p^k. Обозначим это число $\nu_p(n)$.

Свойства. Для любых целых чисел a, b выполнено

- $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$;
- $\nu_p(a+b) \geqslant \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$. Если $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, то $\nu_p(a+b) = \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$.

1. Лена выписала в строчку 1000 натуральных чисел и обнаружила, что произведение любых двух соседних чисел является точным кубом. Докажите, что произведение двух крайних чисел тоже является точным кубом.

2. Даны натуральные числа a, b, c, d и e. Докажите, что если числа ab, cd, $ac+bd$ делятся на e, то ac и bd тоже делятся на e.

3. Ненулевые целые числа m, n, k таковы, что число $\frac{m}{n} + \frac{n}{k} + \frac{k}{m}$ является целым. Докажите, что mnk — точный куб.

4. **(а)** **Формула Лежандра.** Даны натуральное число n и простое число p. Докажите равенство

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots .$$

(б) Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что число

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_n!}$$

является целым.

(в) Дано натуральное число n. Докажите, что число

$$\frac{C_{2n}^n}{n+1}$$

является целым.

5. Решите в натуральных числах уравнение

$$(n+1)(2n+1) = 10m^2.$$

6. Артемий выписал на доску 57 различных натуральных чисел, не превосходящих 2024. Вадим заметил, что среди любых трёх из этих чисел можно выбрать два, которые в произведении дадут точный квадрат. Докажите, что среди чисел, выписанных Артемием на доску, встретится точный квадрат.