Диагностическая работа. Очный этап.

Задача 1. Известно, что среди 63 монет 7 фальшивых. Все фальшивые монеты весят одинаково, и все настоящие монеты также весят одинаково, фальшивая монета легче настоящей. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить 7 настоящих монет?

Решение. Разделим все монеты, кроме одной, на равные группы по 31 монете и положим эти группы на левую и правую чаши. Если одна из чаш оказалась тяжелее, рассмотрим группу на этой чаше. Так как на другой чаше фальшивых монет больше, то на рассматриваемой чаше не более 3 фальшивых монет. Если же весы показали равенство, то на обеих чашах вместе лежит чётное число фальшивых монет, поэтому монета, которую мы отложили в начале, является фальшивой. Значит, в каждой из групп по 3 фальшивые монеты. Итак, после первого взвешивания мы смогли найти группу из 31 монеты, в которой не более 3 фальшивых. Рассмотрим эту группу, а остальные монеты отложим, они нам больше не понадобятся.

Аналогично разделим все эти монет, кроме одной, на две группы по 15 монет и сравним веса этих групп. Аналогичные рассуждения показывают, что мы сможем найти группу из 15 монет, в которой не более 1 фальшивой. Рассмотрим эту группу и отложим остальные монеты.

Наконец, разделим все оставшиеся монеты, кроме одной, на две равные группы по 7 монет. Если одна из чаш оказалась тяжелее, то в ней все 7 монет — настоящие. Если чаши весят одинаково, то все монеты на обеих чашах — настоящие. □

Задача 2. Лена задумала натуральное составное число n. Затем она нашла все собственные делители числа n, прибавила к каждому 1 и выписала полученные числа на доску. Ваня посмотрел на доску и заметил, что на ней записаны в точности все собственные делители некоторого натурального числа m. Найдите, чему могут быть равны n и m.

Напомним, что делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа.

Решение. Пусть a — наименьший собственный делитель числа n. Ясно, что a является простым числом. Кроме того, $a+1$ — это наименьший собственный делитель числа m, поэтому число $a+1$ также является простым. Так как a и $a+1$ — два последовательных простых числа, то $a=2, a+1=3$. Значит, число m нечётно (ведь его наименьший простой делитель равен 3), а тогда и любой собственный делитель числа m тоже является нечётным числом. Поскольку все делители числа n на единицу меньше делителей m, то все делители числа n чётны. Значит, n не имеет нечётных простых делителей. Таким образом, n является степенью двойки. Обозначим $n=2^k$, где k — натуральное число, большее 1. Если $k \geqslant 3$, то на доске будут выписаны числа $2+1=3$ и $4+1=5$ (и, возможно, другие). Значит, число m делится на 15, и тогда либо $m=15$, либо 15 является собственным делителем числа m. В первом случае получаем, что никаких других чисел на доске быть не может, то есть $n=2^3=8, m=15$. Во втором случае получаем, что число 15 должно быть выписано на доску, но тогда число 14 является делителем числа 2^k, что невозможно. Осталось рассмотреть случай $n=4$, который возможен при $m=9$ (у других составных чисел, кратных трём больше одного собственного делителя). □

Задача 3. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. На отрезке BC выбрана точка X, а на отрезке BD — точка Y, причём $CX = EX$ и $AY = DY$. Лучи YA и XE пересекаются в точке Z. Докажите, что середина отрезка BZ лежит на прямой AE.

Решение. Поскольку треугольники AYD и EXC — равнобедренные, то выполнены равенства $\angle ZAE = \angle BDC$, $\angle AEZ = \angle DCB$. Поскольку $AE = AC - CE = AC - AD = DC$, то треугольники $\triangle AZE$ и $\triangle DBC$ равны по стороне и двум прилежащим углам. Опустим перпендикуляры BK и ZL из точек B и Z на прямую AC соответственно. Тогда $BK = ZL$ как соответствующие высоты в равных треугольниках, а также $BK \parallel ZL$. Значит, $BKZL$ — параллелограмм, и середина его диагонали BZ лежит на его второй диагонали KL, что и требовалось доказать.

□

Задача 4. Найдите все вещественные положительные числа x, y, z, удовлетворяющие условию

$$x + 2y + 3z = 2xy + 6yz + 3zx = 3.$$

Решение. Обозначим $a = x, b = 2y, c = 3z$. Тогда исходные равенства можно будет переписать в следующем виде

$$a + b + c = ab + bc + ca = 3.$$

Из имеющихся равенств следует, что

$$(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca).$$

Раскроем скобки и перенесём все слагаемые в левую часть

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.$$

Заметим, что это равенство можно переписать следующим образом

$$\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} = 0.$$

Поскольку квадрат вещественного числа неотрицателен, имеющееся равенство может выполняться только при $a = b = c$. Вспомнив условие $a + b + c = 3$, получаем, что $a = b = c = 1$. Значит, $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{3}$. □

Задача 5. В клетках квадрата 101×101 расставлены числа $1, 0, -1$ (по одному в каждой клетке). Оказалось, что в любом клетчатом квадратике 2×2 можно выбрать три клетки так, что сумма чисел в этих клетках равна нулю. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всём квадрате?

Решение. Пример. На рисунке ниже изображён пример для квадрата 7×7.

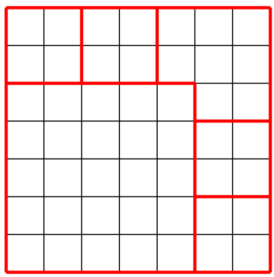
1	1	1	1	1	1	1
0	−1	0	−1	0	−1	0
1	1	1	1	1	1	1
0	−1	0	−1	0	−1	0
1	1	1	1	1	1	1
0	−1	0	−1	0	−1	0
1	1	1	1	1	1	1

Пронумеруем все строчки от нижней к верхней и все столбцы от левого к правому натуральными числами от 1 до 101. Заполним все строчки с нечётными номерами единицами. А в строчках с чётными номерами будем чередовать числа 0 и -1 (начав с нуля). Ясно, что в любом квадратике 2×2 найдётся строчка из двух единиц, а в другой строчке будет одно число 0 и одно число -1, поэтому можно выбрать клетки с числам 1, 0 и -1, удовлетворив условие. Количество единиц во всём квадрате равно $51 \cdot 101 = 5151$ (51 строчка по 101 единице), а количество чисел -1 во всём квадрате равно $50 \cdot 50 = 2500$ (50 строчек по 50 чисел -1). Значит, вся сумма равна $5151 - 2500 = 2651$.

Оценка. Индукцией по n докажем, что если в клетках квадрата $(2n+1) \times (2n+1)$ расставлены числа $1, 0$ и -1 в соответствии с условием задачи, то сумма всех чисел в табличке не превосходит $n^2 + 3n + 1$.

База. При $n = 0$ сумма чисел в табличке не превосходит 1.

Переход. Выделим в квадрате $(2n+1) \times (2n+1)$ один квадрат $(2n-1) \times (2n-1)$, $2n-2$ квадрата 2×2 и один квадрат 3×3 без угловой клетки (на рисунке ниже изображено такое разбиение для квадрата 7×7)



По предположению индукции в квадрате $(2n-1) \times (2n-1)$ сумма чисел не превосходит $(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$. Из условия следует, что сумма чисел в каждом из квадратов 2×2 не превосходит 1. Докажем, что сумма чисел в выделенном квадрате 3×3 без угловой клетки не превосходит 4. Рассмотрим любой из трёх квадратиков 2×2, содержащихся в этой фигуре, сумма чисел в нём не превосходит 1. Значит, если во всей фигуре сумма не меньше пяти, то во всех оставшихся клетках фигуры стоят единицы. Таким образом, в любой клетке фигуры, не принадлежащей хотя бы одному квадратику 2×2, стоит единица. Но такими клетками являются все клетки фигуры, кроме одной, и нетрудно видеть, что единицы во всех этих клетках стоять не могут.

Итого, сумма чисел в таблице не превосходит

$$(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 + 4 + 2(n-1) = n^2 + 3n + 1,$$

что и требовалось доказать.

Подставляя $n = 50$, получаем, что сумма чисел, расставленных в квадрате 101×101 в соответствии с условием задачи, не превосходит $50^2 + 3 \cdot 50 + 1 = 2651$.

$\square$

Задача 6. На плоскости расположены n квадратов 2×2 со сторонами, параллельными координатным осям. Ни один из центров этих квадратов не содержится ни в каком другом квадрате (в том числе на границе). Прямоугольник П со сторонами, параллельными координатным осям, содержит все эти квадраты. Докажите, что периметр П не меньше $4\sqrt{n}$.

Решение. Разлинуем плоскость прямыми, параллельными координатным осям, на квадратные клетки со стороной 1. Из условия следует, что центры разных квадратов 2×2 находятся в разных клетках. С другой стороны, если центр квадрата 2×2 находится в клетке, то эта клетка целиком лежит в квадрате 2×2. Отсюда следует, что площадь прямоугольника П не меньше n. Пусть его стороны равны a и b. Тогда его периметр равен $2(a+b)$. Заметим, что

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab \geqslant 4ab \geqslant 4n.$$

Таким образом $2(a+b) \geqslant 2\sqrt{4n} = 4\sqrt{n}$.

$\square$