Диагностическая работа. Очный этап.

Задача 1. Известно, что среди 63 монет 7 фальшивых. Все фальшивые монеты весят одинаково, и все настоящие монеты также весят одинаково, фальшивая монета легче настоящей. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить 7 настоящих монет?

Задача 2. Лена задумала натуральное составное число n. Затем она нашла все собственные делители числа n, прибавила к каждому 1 и выписала полученные числа на доску. Ваня посмотрел на доску и заметил, что на ней записаны в точности все собственные делители некоторого натурального числа m. Найдите, чему могут быть равны n и m.

Напомним, что делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа.

Задача 3. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. На отрезке BC выбрана точка X, а на отрезке BD — точка Y , причём $CX = EX$ и $AY = DY$. Лучи YA и XE пересекаются в точке Z. Докажите, что середина отрезка BZ лежит на прямой AE.

Задача 4. Найдите все вещественные положительные числа x, y, z, удовлетворяющие условию

$$x + 2y + 3z = 2xy + 6yz + 3zx = 3.$$

Задача 5. В клетках квадрата 101×101 расставлены числа $1, 0, -1$ (по одному в каждой клетке). Оказалось, что в любом клетчатом квадратике 2×2 можно выбрать три клетки так, что сумма чисел в этих клетках равна нулю. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всём квадрате?

Задача 6. На плоскости расположены n квадратов 2×2 со сторонами, параллельными координатным осям. Ни один из центров этих квадратов не содержится ни в каком другом квадрате (в том числе на границе). Прямоугольник П со сторонами, параллельными координатным осям, содержит все эти квадраты. Докажите, что периметр П не меньше $4\sqrt{n}$.