Диагностическая работа. Дистанционный этап.

Задача 1. У Артемия есть не более 400 шариков. Известно, что Артемий может оставить один шарик себе и разделить оставшиеся на три равные группы. Также Артемий может оставить себе 2 шарика и разделить оставшиеся на 7 равных групп. Наконец, Артемий может разделить все свои шарики на пять равных групп. Найдите наибольшее количество шариков, которое могло быть у Артемия.

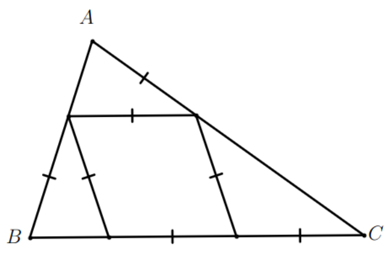
Задача 2.1. Математики, физики и химики стоят в очереди в библиотеку. Оказалось, что в очереди ровно 37 физиков, перед каждым из которых стоит химик, и ровно 9 химиков, перед каждым из которых стоит физик. Какое наименьшее число математиков может стоять в очереди?

Задача 2.2. Математики, физики и химики стоят в очереди в библиотеку. Оказалось, что в очереди ровно 38 физиков, перед каждым из которых стоит химик, и ровно 12 химиков, перед каждым из которых стоит физик. Какое наименьшее число математиков может стоять в очереди?

Задача 2.3. Математики, физики и химики стоят в очереди в библиотеку. Оказалось, что в очереди ровно 39 физиков, перед каждым из которых стоит химик, и ровно 15 химиков, перед каждым из которых стоит физик. Какое наименьшее число математиков может стоять в очереди?

Задача 2.4. Математики, физики и химики стоят в очереди в библиотеку. Оказалось, что в очереди ровно 40 физиков, перед каждым из которых стоит химик, и ровно 18 химиков, перед каждым из которых стоит физик. Какое наименьшее число математиков может стоять в очереди?

Задача 3. Найдите углы треугольника ABC.



Задача 4.1. Вадим задумал натуральное число. Оказалось, что сумма этого числа с его наименьшим делителем, отличным от 1, равна 3630. Найдите наименьшее число, которое мог задумать Вадим.

Задача 4.2. Вадим задумал натуральное число. Оказалось, что сумма этого числа с его наименьшим делителем, отличным от 1, равна 5940. Найдите наименьшее число, которое мог задумать Вадим.

Задача 4.3. Вадим задумал натуральное число. Оказалось, что сумма этого числа с его наименьшим делителем, отличным от 1, равна 8250. Найдите наименьшее число, которое мог задумать Вадим.

Задача 4.4. Вадим задумал натуральное число. Оказалось, что сумма этого числа с его наименьшим делителем, отличным от 1, равна 1320. Найдите наименьшее число, которое мог задумать Вадим.

Задача 5.1. У Вадима есть клетчатая доска 21×21. Он хочет разделить её клетки на прямоугольники так, чтобы среди них было ровно два «вертикальных» прямоугольника $k \times 1$ и ровно два «горизонтальных» прямоугольника $1 \times k$ для каждого чётного натурального числа k от 2 до 20, а также ровно один прямоугольник 1×1. Сколькими способами Вадим может это сделать?

Задача 5.2. У Вадима есть клетчатая доска 19×19. Он хочет разделить её клетки на прямоугольники так, чтобы среди них было ровно два «вертикальных» прямоугольника $k \times 1$ и ровно два «горизонтальных» прямоугольника $1 \times k$ для каждого чётного натурального числа k от 2 до 18, а также ровно один прямоугольник 1×1. Сколькими способами Вадим может это сделать?

Задача 5.3. У Вадима есть клетчатая доска 23×23. Он хочет разделить её клетки на прямоугольники так, чтобы среди них было ровно два «вертикальных» прямоугольника $k \times 1$ и ровно два «горизонтальных» прямоугольника $1 \times k$ для каждого чётного натурального числа k от 2 до 22, а также ровно один прямоугольник 1×1. Сколькими способами Вадим может это сделать?

Задача 5.4. У Вадима есть клетчатая доска 25×25. Он хочет разделить её клетки на прямоугольники так, чтобы среди них было ровно два «вертикальных» прямоугольника $k \times 1$ и ровно два «горизонтальных» прямоугольника $1 \times k$ для каждого чётного натурального числа k от 2 до 24, а также ровно один прямоугольник 1×1. Сколькими способами Вадим может это сделать?

Задача 6.1. Дан треугольник ABC. Серединные перпендикуляры, восстановленные к сторонам AB и AC, пересекают биссектрису угла $\angle BAC$ в точках P и Q соответственно. Также биссектриса $\angle BAC$ повторно пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке W. Найдите длину отрезка AW, если $BP = 10$, $CQ = 15$.

Задача 6.2. Дан треугольник ABC. Серединные перпендикуляры, восстановленные к сторонам AB и AC, пересекают биссектрису угла $\angle BAC$ в точках P и Q соответственно. Также биссектриса $\angle BAC$ повторно пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке W. Найдите длину отрезка AW, если $BP = 9$, $CQ = 13$.

Задача 6.3. Дан треугольник ABC. Серединные перпендикуляры, восстановленные к сторонам AB и AC, пересекают биссектрису угла $\angle BAC$ в точках P и Q соответственно. Также биссектриса $\angle BAC$ повторно пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке W. Найдите длину отрезка AW, если $BP = 11$, $CQ = 17$.

Задача 6.4. Дан треугольник ABC. Серединные перпендикуляры, восстановленные к сторонам AB и AC, пересекают биссектрису угла $\angle BAC$ в точках P и Q соответственно. Также биссектриса $\angle BAC$ повторно пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке W. Найдите длину отрезка AW, если $BP = 5$, $CQ = 7$.

Задача 7.1. На окружности отмечены вершины правильного 100-угольника. Какое наибольшее количество попарно неравных треугольников с вершинами в отмеченных точках можно выбрать (треугольники могут иметь общие вершины или стороны)?

Задача 7.2. На окружности отмечены вершины правильного 98-угольника. Какое наибольшее количество попарно неравных треугольников с вершинами в отмеченных точках можно выбрать (треугольники могут иметь общие вершины или стороны)?

Задача 7.3. На окружности отмечены вершины правильного 94-угольника. Какое наибольшее количество попарно неравных треугольников с вершинами в отмеченных точках можно выбрать (треугольники могут иметь общие вершины или стороны)?

Задача 7.4. На окружности отмечены вершины правильного 92-угольника. Какое наибольшее количество попарно неравных треугольников с вершинами в отмеченных точках можно выбрать (треугольники могут иметь общие вершины или стороны)?

Задача 8. Даны натуральные числа x, y, удовлетворяющие равенству

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 10.$$

Чему может быть равно меньшее из этих чисел?

Задача 9.1. В параллелограмме $ABCD$ точка E является серединой стороны BC. Точка F на отрезке DE выбрана таким образом, что отрезки AF и DE перпендикулярны. Найдите угол $\angle FBE$, если $\angle DAB = 80°$, а $\angle EDC = 35°$.

Задача 9.2. В параллелограмме $ABCD$ точка E является серединой стороны BC. Точка F на отрезке DE выбрана таким образом, что отрезки AF и DE перпендикулярны. Найдите угол $\angle FBE$, если $\angle DAB = 70°$, а $\angle EDC = 45°$.

Задача 9.3. В параллелограмме $ABCD$ точка E является серединой стороны BC. Точка F на отрезке DE выбрана таким образом, что отрезки AF и DE перпендикулярны. Найдите угол $\angle FBE$, если $\angle DAB = 100°$, а $\angle EDC = 20°$.

Задача 9.4. В параллелограмме $ABCD$ точка E является серединой стороны BC. Точка F на отрезке DE выбрана таким образом, что отрезки AF и DE перпендикулярны. Найдите угол $\angle FBE$, если $\angle DAB = 85°$, а $\angle EDC = 25°$.

Задача 10.1. Найдите количество перестановок $(x_1, x_2, \ldots, x_{201})$ чисел

$$-99, -98, -97, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 101,$$

для которых выполнены неравенства

$$x_1x_2 \leqslant x_2x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_ix_{i+1} \leqslant x_{i+1}x_{i+2} \leqslant \ldots \leqslant x_{200}x_{201}.$$

Задача 10.2. Найдите количество перестановок $(x_1, x_2, \ldots, x_{197})$ чисел

$$-97, -96, -95, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 99,$$

для которых выполнены неравенства

$$x_1x_2 \leqslant x_2x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_ix_{i+1} \leqslant x_{i+1}x_{i+2} \leqslant \ldots \leqslant x_{196}x_{197}.$$

Задача 10.3. Найдите количество перестановок $(x_1, x_2, \ldots, x_{193})$ чисел

$$-95, -94, -93, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 97,$$

для которых выполнены неравенства

$$x_1x_2 \leqslant x_2x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_ix_{i+1} \leqslant x_{i+1}x_{i+2} \leqslant \ldots \leqslant x_{192}x_{193}.$$

Задача 10.4. Найдите количество перестановок $(x_1, x_2, \ldots, x_{189})$ чисел

$$-93, -92, -91, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 95,$$

для которых выполнены неравенства

$$x_1x_2 \leqslant x_2x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_ix_{i+1} \leqslant x_{i+1}x_{i+2} \leqslant \ldots \leqslant x_{188}x_{189}.$$

Задача 11.1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $\angle A = 2\angle B$. На стороне AB нашлась такая точка E, что $\angle BCE = \angle DCE = \angle AED$. Найдите длину отрезка AE, если $AD = 9$, $BE = 17$.

Задача 11.2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $\angle A = 2\angle B$. На стороне AB нашлась такая точка E, что $\angle BCE = \angle DCE = \angle AED$. Найдите длину отрезка AE, если $AD = 6$, $BE = 13$.

Задача 11.3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $\angle A = 2\angle B$. На стороне AB нашлась такая точка E, что $\angle BCE = \angle DCE = \angle AED$. Найдите длину отрезка AE, если $AD = 13$, $BE = 29$.

Задача 11.4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $\angle A = 2\angle B$. На стороне AB нашлась такая точка E, что $\angle BCE = \angle DCE = \angle AED$. Найдите длину отрезка AE, если $AD = 7$, $BE = 18$.

Задача 12.1. Ненулевые вещественные числа a, b, c, x, y, z таковы, что

$$a = \frac{b+c}{x-2}, \quad b = \frac{a+c}{y-2}, \quad c = \frac{a+b}{z-2}.$$

Оказалось, что $xy + yz + zx = 100, x + y + z = 2024$. Найдите, чему равно xyz.

Задача 12.2. Ненулевые вещественные числа a, b, c, x, y, z таковы, что

$$a = \frac{b+c}{x-2}, \quad b = \frac{a+c}{y-2}, \quad c = \frac{a+b}{z-2}.$$

Оказалось, что $xy + yz + zx = 90, x + y + z = 2023$. Найдите, чему равно xyz.

Задача 12.3. Ненулевые вещественные числа a, b, c, x, y, z таковы, что

$$a = \frac{b+c}{x-2}, \quad b = \frac{a+c}{y-2}, \quad c = \frac{a+b}{z-2}.$$

Оказалось, что $xy + yz + zx = 110, x + y + z = 2025$. Найдите, чему равно xyz.

Задача 12.4. Ненулевые вещественные числа a, b, c, x, y, z таковы, что

$$a = \frac{b+c}{x-2}, \quad b = \frac{a+c}{y-2}, \quad c = \frac{a+b}{z-2}.$$

Оказалось, что $xy + yz + zx = 120, x + y + z = 2026$. Найдите, чему равно xyz.