1. (a) Длину прямоугольника уменьшили на 5%, а ширину уменьшили на 10%. При этом периметр прямоугольника уменьшился на 6%. На сколько процентов уменьшился бы периметр исходного прямоугольника, если его длину уменьшить на 10%, а ширину уменьшить на 5%?

Ответ: На 9%.

Решение: Длину прямоугольника обозначим за a, ширину — за b. Из условия задачи получается, что

$$0,95a + 0,9b = 0,94(a + b)$$
$$0,01a = 0,04b$$
$$a = 4b$$

Если длину уменьшить на 10%, а ширину уменьшить на 5%, то полупериметр будет равен

$$0,9a + 0,95b = 0,9 \cdot 4b + 0,95b = 3,6b + 0,95b = 4,55b$$

. При этом исходный полупериметр равен

$$a + b = 4b + b = 5b$$

. Тогда отношение нового полупериметра к старому, совпадающее с отношением периметров, равно

$$\frac{4,55b}{5b} = \frac{455}{500} = 0,91.$$

То есть, периметр уменьшился на 9%.

(b) Длину прямоугольника уменьшили на 3%, а ширину уменьшили на 8%. При этом периметр прямоугольника уменьшился на 4%. На сколько процентов уменьшился бы периметр исходного прямоугольника, если его длину уменьшить на 8%, а ширину уменьшить на 10%?

Ответ: На 8,4%.

(c) Длину прямоугольника уменьшили на 5%, а ширину уменьшили на 9%. При этом периметр прямоугольника уменьшился на 7%. На сколько процентов уменьшился бы периметр исходного прямоугольника, если его длину уменьшить на 10%, а ширину уменьшить на 4%?

Ответ: На 7%.

(d) Длину прямоугольника уменьшили на 7%, а ширину уменьшили на 11%. При этом периметр прямоугольника уменьшился на 8%. На сколько процентов уменьшился бы периметр исходного прямоугольника, если его длину уменьшить на 8%, а ширину уменьшить на 10%?

Ответ: На 8,5%.

2. (a) Андрей, Борис, Давид и Кирилл подозреваются в ограблении банка. Было установлено, что:

(a) Если Борис виновен, то Кирилл — его сообщник в преступлении;

(b) Если Кирилл виновен, то или Андрей — соучастник, или Борис невиновен;

(c) Если Давид невиновен, то Борис виновен, а Андрей не виновен;
(d) Если Давид виновен, то Борис тоже виновен.
Сколько невиновных среди них?
Ответ: 0.
Решение: Из условий (c) и (d) следует, что Борис виновен. Тогда Кирилл также виновен — следует из условия (a). Значит и Андрей виновен — следует из условия (b). Тогда снова из условия (c) следует, что и Давид виновен, так как Борис и Андрей виновны. Получается, что виновны все и невиновных нет.

(b) Алексей, Борис, Владимир и Матвей подозреваются в ограблении банка. Было установлено, что:
(a) Если Владимир невиновен, то Борис виновен, а Алексей не виновен;
(b) Если Борис виновен, то Матвей — его сообщник в преступлении;
(c) Если Матвей виновен, то или Алексей — соучастник, или Борис невиновен;
(d) Если Владимир виновен, то Борис тоже виновен.
Сколько виновных среди них?
Ответ: 4.

(c) Александр, Борис, Геннадий и Павел подозреваются в ограблении банка. Было установлено, что:
(a) Если Геннадий виновен, то Александр — его сообщник в преступлении;
(b) Если Александр виновен, то или Павел — соучастник, или Борис невиновен;
(c) Если Борис невиновен, то Геннадий виновен, а Павел не виновен;
(d) Если Борис виновен, то Геннадий тоже виновен.
Сколько невиновных среди них?
Ответ: 0 или 2.
Решение: Из условий (c) и (d) следует, что Геннадий виновен. Тогда Александр также виновен — следует из условия (a). Значит из условия (b) либо Павел виновен, либо Борис невиновен. Если Павел виновен, то из условия (c) следует, что и Борис виновен, так как Геннадий и Павел виновны. Получается, что в этом случае виновны все и невиновных нет. Если Павел невиновен, то по условию (b) Борис невиновен. При этом условие (c) выполняется. Получается, что в этом случае двое виновны и двое невиновны.

(d) Андрей, Борис, Давид и Кирилл подозреваются в ограблении банка. Было установлено, что:
(a) Если Давид виновен, то Андрей — его сообщник в преступлении;
(b) Если Кирилл невиновен, то Давид виновен, а Борис не виновен;
(c) Если Андрей виновен, то или Борис — соучастник, или Давид невиновен;
(d) Если Кирилл виновен, то Давид тоже виновен.
Сколько виновных среди них?
Ответ: 4.

3. (a) Какое наибольшее количество различных натуральных чисел, не делящихся на 210, можно выписать в тетрадь, чтобы при этом произведение любых четырёх из них делилось на 210?
Ответ: 12.

Решение: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Чтобы произведение четырёх чисел делилось на 210, каждый из простых множителей 2, 3, 5 и 7 должен быть хотя бы у одного из чисел. Тогда без множителя 2 может быть всего максимум три числа, без множителя 3 — тоже максимум три числа, без множителя 5 — максимум три числа и без множителя 7 — максимум три числа. При этом у каждого из чисел нет всех четырёх множителей, потому что иначе оно будет делиться на 210. Тогда всего чисел не может быть больше $3 \cdot 4 = 12$.

Пример на 12 легко строится: берём все возможные тройки из множителей и в каждую из троек добавляем ещё какой-то множитель, больший 7. Например, можно сделать так:

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$,
$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$, $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$, $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$,
$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$, $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$,
$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$, $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$.

(b) Какое наибольшее количество различных натуральных чисел, не делящихся на 310, можно выписать в тетрадь, чтобы при этом произведение любых шести из них делилось на 310?
Ответ: 15.

(c) Какое наибольшее количество различных натуральных чисел, не делящихся на 510, можно выписать в тетрадь, чтобы при этом произведение любых пяти из них делилось на 510?
Ответ: 16.

(d) Какое наибольшее количество различных натуральных чисел, не делящихся на 410, можно выписать в тетрадь, чтобы при этом произведение любых семи из них делилось на 410?
Ответ: 18.

4. (a) В Новый год из леса вышли зайцы и лисы и встали в хоровод. Всего вышло 30 животных. Оказалось, что ровно 20 животных держали за лапу зайца, а ровно 24 — лису. Сколько было лис в хороводе?
Ответ: 17.
Решение: Обозначим количество животных, которые держали двух лис за a; тех, кто держал двух зайцев, — за b; тех, кто держал лису и зайца, — за c. Тогда

$$a + c = 24$$
$$b + c = 20$$
$$a + b + c = 30.$$

Складывая первые два равенства и вычитая третье, получаем $c = 14$. Далее получаем $a = 10$, $b = 6$.

Посчитаем количество лап у лис. За каждую из них кто-то держится. Те, 10 животных, которые стоят между двумя лисами, держат $2a = 10 \cdot 2 = 20$ лап. А те 14 животных, которые стоят между зайцем и лисой, держат 14 лап. Всего получается $20 + 14 = 34$ лап у лис, а самих лис $34 : 2 = 17$.

(b) В Новый год из леса вышли зайцы и лисы и встали в хоровод. Всего вышло 40 животных. Оказалось, что ровно 28 животных держали за лапу зайца, а ровно 20 — лису. Сколько было лис в хороводе?
Ответ: 16.

(c) В Новый год из леса вышли зайцы и лисы и встали в хоровод. Всего вышло 36 животных. Оказалось, что ровно 18 животных держали за лапу зайца, а ровно 22 — лису. Сколько было лис в хороводе?
Ответ: 20.

(d) В Новый год из леса вышли зайцы и лисы и встали в хоровод. Всего вышло 34 животных. Оказалось, что ровно 20 животных держали за лапу зайца, а ровно 28 — лису. Сколько было лис в хороводе?
Ответ: 21.

5. (a) Есть набор из шести гирь, на которых сделаны надписи (на каждой по одной) 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г, 6 г. Оказалось, что 5 надписей верные, а одна нет — вес её гири меньше указанного. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без стрелок можно гарантировано определить, какая надпись неправильная?
Ответ: За 2 взвешивания.
Решение: Нетрудно понять, что одного взвешивания недостаточно (поскольку вариантов, какая из надписей неправильная, — шесть, а возможных исходов одного взвешивания — три).
Двух взвешиваний хватит. Первое взвешивание: 1 и 2 взвешиваем с 3. а) Если 1 и 2 легче, значит, бракованная 1 или 2. Взвешиваем 1 и 5 с 2 и 4. На лёгкой чашке бракованная монета. б) Если 3 легче, то она бракованная. в) Если 1 и 2 равны 3, то бракованная среди 4, 5, 6. Взвешиваем 2 и 4 с 1 и 5. Если одна на одной из чашек вес монет меньше, то там бракованная. Иначе бракованная 6.

(b) Есть набор из шести гирь, на которых сделаны надписи (на каждой по одной) 2 г, 3 г, 5 г, 6 г, 7 г, 8 г. Оказалось, что 5 надписей верные, а одна нет — вес её гири меньше указанного. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без стрелок можно гарантировано определить, какая надпись неправильная?
Ответ: За 2 взвешивания.

(c) Есть набор из шести гирь, на которых сделаны надписи (на каждой по одной) 1 г, 3 г, 4 г, 5 г, 7 г, 8 г. Оказалось, что 5 надписей верные, а одна нет — вес её гири меньше указанного. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без стрелок можно гарантировано определить, какая надпись неправильная?
Ответ: За 2 взвешивания.

(d) Есть набор из шести гирь, на которых сделаны надписи (на каждой по одной) 2 г, 4 г, 6 г, 7 г, 9 г, 10 г. Оказалось, что 5 надписей верные, а одна нет — вес её гири меньше указанного. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без стрелок можно гарантировано определить, какая надпись неправильная?

Ответ: За 2 взвешивания.

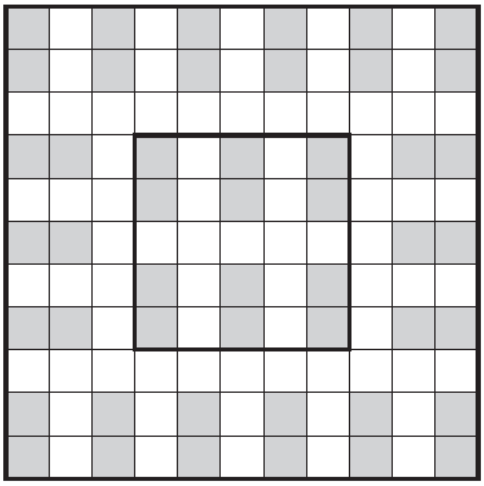
6. (a) Внутри клетчатого квадрата размером $n \times n$ расположили несколько доминошек 1×2 так, чтобы они не касались друг друга даже углами. Известно, что площадь квадрата, покрытая доминошками, равна 2008. Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ: 77.

Решение: К каждой доминошке добавим "каёмку", шириной в полклетки. Площадь доминошки вместе с каёмой равна $2 \cdot 3 = 6$ Тогда условие, что доминошки не касаются друг друга равносильно тому, что доминошки вместе с каёмками не пересекаются. Также площадь доминошки с каёмкой в 3 раза больше площади самой доминошки. Поэтому площадь покрывая и доминошками, и их каёмками равна $2008 \cdot 3 = 6024$. При этом каёмки могут выходить за пределы квадрата, но максимум на полклетки. Тогда площадь, в которой находятся доминошки с каёмками, равна $(n+1)^2$. Эта площадь должна быть не меньше 6024. Далее получаем условие:

$$
\begin{gathered}
(n+1)^2 \geqslant 6024 \\
n+1 \geqslant \sqrt{6024} \\
n+1 \geqslant 78 \\
n \geqslant 77.
\end{gathered}
$$

Пример расположения доминошек в квадрате 77×77. Выкладывать доминошки нужно по следующему шаблону:



В каждом следующем "слое" становится на 12 доминошек больше. На картинке изображен квадрат 11×11. Чтобы получился квадрат 77×77 потребуется добавить ещё 11 "слоёв". Всего доминошек будет

$$6 + 18 + 30 + 42 + 54 + 66 + 78 + 90 + 102 + 114 + 126 + 138 + 150 = 1014.$$

Покрытая площадь получилась 2028. Чтобы она была равна 2008, уберём любые 10 доминошек.

(b) Внутри клетчатого квадрата размером $n \times n$ расположили несколько доминошек 1×2 так, чтобы они не касались друг друга даже углами. Известно, что площадь квадрата, покрытая доминошками, равна 2352. Найдите наименьшее возможное значение n.

Ответ: 83.

(c) Внутри клетчатого квадрата размером $n \times n$ расположили несколько доминошек 1×2 так, чтобы они не касались друг друга даже углами. Известно, что площадь квадрата, покрытая доминошками, равна 1452. Найдите наименьшее возможное значение n.
Ответ: 65.

(d) Внутри клетчатого квадрата размером $n \times n$ расположили несколько доминошек 1×2 так, чтобы они не касались друг друга даже углами. Известно, что площадь квадрата, покрытая доминошками, равна 1728. Найдите наименьшее возможное значение n.
Ответ: 71.

7. (a) Из доски 7×7 вырезали четыре угловые клетки. Сколькими способами на эту доску можно поставить 4 ладьи, не бьющие друг друга? (Две ладьи бьют друг друга, если стоят в одной строке или в одном столбце.)
Ответ: 20 200.
Решение: $\dfrac{7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2}{4!} - 4 \cdot \dfrac{6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2}{3!} + 2 \cdot \dfrac{5^2 \cdot 4^2}{2!} = 29400 - 9600 + 400 = 20200.$
Сначала просто расставляем 4 ладьи на доску. Потом убираем те варианты, когда хотя бы одна из ладей стоит в углу. Способы, когда две ладьи в углах, убрали два раза, поэтому их надо прибавить.

(b) Из доски 8×8 вырезали четыре угловые клетки. Сколькими способами на эту доску можно поставить 4 ладьи, не бьющие друг друга? (Две ладьи бьют друг друга, если стоят в одной строке или в одном столбце.)
Ответ: 89100.

(c) Из доски 7×7 вырезали четыре угловые клетки. Сколькими способами на эту доску можно поставить 3 ладьи, не бьющие друг друга? (Две ладьи бьют друг друга, если стоят в одной строке или в одном столбце.)
Ответ: 5600.

(d) Из доски 8×8 вырезали четрые угловые клетки. Сколькими способами на эту доску можно поставить 3 ладьи, не бьющие друг друга? (Две ладьи бьют друг друга, если стоят в одной строке или в одном столбце.)
Ответ: 15360.

8. (a) Вася написал на доске натуральное число, а затем поделил его с остатком на 333. Оказалось, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Затем Лена тоже решила поделить исходное число с остатком, но на 777. Сумма неполного частного и остатка также оказалось равна 300. Какое число мог изначально написать Вася?
Ответ: 300 или 64708.
Решение: Обозначим загаданное число за n. Поделим его с остатком на 333 и

777:

$$n = 333k + (300 - k) = 777l + (300 - l).$$

Преобразузуем равенство и получим: $332k = 776l$. Разделим обе части на 4, $83k = 194l$. Числа 83 и 194 взаимно просты, следовательно $194 \vdots k$ и при этом $0 \leqslant k \leqslant 300$. Также число $(300 - k)$ должно быть остатком при делении на 333 и 777, поэтому $0 \leqslant 300 - k < 333$ и $0 \leqslant 300 - l < 777$. Под указанные ограничения подходят только решения с $k = 0$ и $k = 194$. В первом случае получаем, $n = 300$, а во втором $n = 64708$.

(b) Вася написал на доске натуральное число, а затем поделил его с остатком на 333. Оказалось, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Затем Лена тоже решила поделить исходное число с остатком, но на 555. Сумма неполного частного и остатка также оказалось равна 300. Какое число мог изначально написать Вася?
Ответ: 300 или 92264.

(c) Вася написал на доске натуральное число, а затем поделил его с остатком на 111. Оказалось, что сумма неполного частного и остатка равна 400. Затем Лена тоже решила поделить исходное число с остатком, но на 777. Сумма неполного частного и остатка также оказалось равна 400. Какое число мог изначально написать Вася?
Ответ: 43080.

(d) Вася написал на доске натуральное число, а затем поделил его с остатком на 111. Оказалось, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Затем Лена тоже решила поделить исходное число с остатком, но на 555. Сумма неполного частного и остатка также оказалось равна 300. Какое число мог изначально написать Вася?
Ответ: 30770.

9. (a) Для некоторых действительных чисел x, y, z и k выполняются соотношения

$$\frac{7}{x+y} = \frac{k}{x+z} = \frac{11}{z-y}.$$

Чему может быть равно k?
Ответ: 18.
Решение: Воспользуемся *свойством ряда равных отношений*: если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, если $b + d \neq 0$. Оно легко доказывается, если обозначить значения данных дробей за m. Получаем $a = mb$, $c = md$ и $\frac{a+c}{b+d} = \frac{mb+md}{b+d} = \frac{m(b+d)}{b+d} = m$.
Тогда $\frac{7+11}{x+y+z-y} = \frac{k}{x+z}$. Откуда $\frac{18}{x+z} = \frac{k}{x+z}$. Значит, $k = 18$.

(b) Для некоторых действительных чисел x, y, z и k выполняются соотношения

$$\frac{12}{x-y} = \frac{k}{x-z} = \frac{13}{y-z}.$$

Чему может быть равно k?
Ответ: 25.

(c) Для некоторых действительных чисел x, y, z и k выполняются соотношения

$$\frac{5}{y-z} = \frac{k}{x+y} = \frac{12}{x+z}.$$

Чему может быть равно k?
Ответ: 17.

(d) Для некоторых действительных чисел x, y, z и k выполняются соотношения

$$\frac{10}{x-z} = \frac{k}{x-y} = \frac{13}{z-y}.$$

Чему может быть равно k?
Ответ: 23.

10. (a) На ферме собрали урожай картошки и стали погружать в грузовик, чтобы отвезти в город. Немного картошки не поместилось в грузовик, поэтому оставшуюся картошку фермер повёз в город на велосипеде. Грузовик ехал со скоростью 65 км/ч, а фермер на велосипеде — со скоростью 5 км/ч. В некоторой момент стало понятно, что велосипед едет слишком медленно. Поэтому картошку из грузовика выгрузили в тележку, запряжённую лошадью, едущую со скоростью 13 км/ч, которая поехала дальше в город. А грузовик поехал обратно, забрал картошку у фермера на велосипеде и повёз её в город. В итоге, грузовик и повозка с лошадью приехали в город одновременно. Сколько времени заняла перевозка картошки, если расстояние от фермы до города равно 1300 км?
Ответ: 44 ч.
Решение: Обозначим период времени, пока большую часть картошки везли на грузовике, за t_1. Период времени, когда грузовик ехал навстречу велосипеду, обозначим за t_2. И период времени, когда меньшую часть карточки везли на грузовике, обозначим за t_3.
За период времени t_1 грузовик проехал расстояние $65t_1$, а велосипед — $5t_1$. Расстояние между ними стало $60t_1$. Далее в течение времени t_2 грузовик и велосипед ехали навстречу друг другу со скоростью сближения 70 км/ч. Поэтому $t_2 = \dfrac{60t_1}{70} = \dfrac{6}{7}t_1$.
Далее запишем выражения для расстояний, которые проехали обе части картошки. Они равны 1300.

$$5(t_1+t_2) + 65t_3 = 65t_1 + 13(t_2+t_3) = 1300$$

Преобразуем первое равенство и подставляем выражение для t_2 через t_1:

$$5t_1 + \frac{30}{7}t_1 + 65t_3 = 65t_1 + \frac{78}{7}t_1 + 13t_3$$
$$52t_3 = 60t_1 + \frac{48}{7}t_1$$
$$t_3 = \frac{9}{7}t_1.$$

Далее первую часть исходного равенства приравниваем 1300 и подставляем выражения для t_2 и t_3 через t_1:

$$5 \cdot \frac{13}{7} t_1 + 65 \cdot \frac{9}{7} t_1 = 1300$$
$$t_1 = 14.$$

И в конце получаем, что общее время $t_1 + t_2 + t_3 = t_1 \left(1 + \frac{6}{7} + \frac{9}{7}\right) = 14 \cdot \frac{22}{7} = 44.$

(b) На ферме собрали урожай картошки и стали погружать в грузовик, чтобы отвезти в город. Немного картошки не поместилось в грузовик, поэтому оставшуюся картошку фермер повёз в город на велосипеде. Грузовик ехал со скоростью 55 км/ч, а фермер на велосипеде — со скоростью 5 км/ч. В некоторой момент стало понятно, что велосипед едет слишком медленно. Поэтому картошку из грузовика выгрузили в тележку, запряжённую лошадью, едущую со скоростью 11 км/ч, которая поехала дальше в город. А грузовик поехал обратно, забрал картошку у фермера на велосипеде и повёз её в город. В итоге, грузовик и повозка с лошадью приехали в город одновременно. Сколько времени заняла перевозка картошки, если расстояние от фермы до города равно 935 км?
Ответ: 37 ч.

(c) На ферме собрали урожай картошки и стали погружать в грузовик, чтобы отвезти в город. Немного картошки не поместилось в грузовик, поэтому оставшуюся картошку фермер повёз в город на велосипеде. Грузовик ехал со скоростью 77 км/ч, а фермер на велосипеде — со скоростью 7 км/ч. В некоторой момент стало понятно, что велосипед едет слишком медленно. Поэтому картошку из грузовика выгрузили в тележку, запряжённую лошадью, едущую со скоростью 11 км/ч, которая поехала дальше в город. А грузовик поехал обратно, забрал картошку у фермера на велосипеде и повёз её в город. В итоге, грузовик и повозка с лошадью приехали в город одновременно. Сколько времени заняла перевозка картошки, если расстояние от фермы до города равно 1771 км?
Ответ: 53 ч.

(d) На ферме собрали урожай картошки и стали погружать в грузовик, чтобы отвезти в город. Немного картошки не поместилось в грузовик, поэтому оставшуюся картошку фермер повёз в город на велосипеде. Грузовик ехал со скоростью 52 км/ч, а фермер на велосипеде — со скоростью 4 км/ч. В некоторой момент стало понятно, что велосипед едет слишком медленно. Поэтому картошку из грузовика выгрузили в тележку, запряжённую лошадью, едущую со скоростью 13 км/ч, которая поехала дальше в город. А грузовик поехал обратно, забрал картошку у фермера на велосипеде и повёз её в город. В итоге, грузовик и повозка с лошадью приехали в город одновременно. Сколько времени заняла перевозка картошки, если расстояние от фермы до города равно 1716 км?
Ответ: 69 ч.

11. (a) Найдите наименьшее нечётное натуральное число, у которого столько же натуральных делителей, сколько у числа 3240.

Ответ: 31 185.
Решение: $3240 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$. Количество делителей равно $(3+1)(4+1)(1+1) = 40$. Далее нужно рассмотреть варианты получить 40 в виде произведения натуральных чисел, каждое из которых не меньше 2, и для каждого рассмотреть наименьшее число, соответствующее такому набору. Наименьшее получается для набора $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ число $3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 31185$.

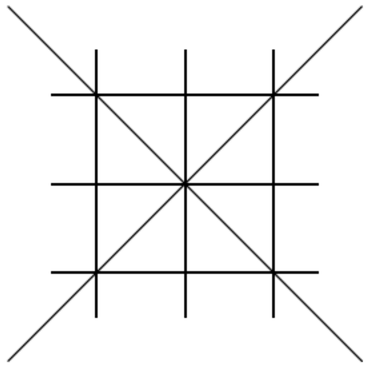
(b) Найдите наименьшее нечётное натуральное число, у которого столько же натуральных делителей, сколько у числа 2700.
Ответ: 17325.

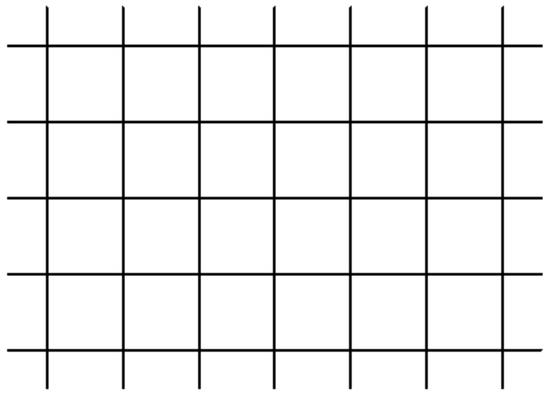
(c) Найдите наименьшее нечётное натуральное число, у которого столько же натуральных делителей, сколько у числа 9000.
Ответ: 45045.

(d) Найдите наименьшее нечётное натуральное число, у которого столько же натуральных делителей, сколько у числа 1080.
Ответ: 10395.

12. (a) На плоскости проведены несколько прямых. У каждой из прямых есть либо 5, либо 7 общих точек с остальными прямыми. Причём есть хотя бы одна прямая с пятью точками пересечения и хотя бы одна — с семью точками пересечения. Сколько всего прямых может быть проведено?
Ответ: 8 или 12.
Решение: Подсчитаем количество точек пересечения каждой прямой с каждой из остальных прямых. Для удобства подсчета можем считать, что ни в какой точке не пересекаются более двух прямых. Если через какую-либо точку пересечения двух прямых проходят еще прямые, мы можем их сдвинуть параллельно самим себе, чтобы они не проходили через точки пересечения каких-либо двух других прямых. Пусть теперь m прямых пересекаются пятью прямыми, а n прямых — с семью прямыми. Тогда всего точек пересечения будет $= (5m + 7n)/2 = n + 5(n+m)/2$. Так как это число должно быть целым, то общее число прямых $N = m + n$ должно быть четным.
Заметим, что $N \geqslant 8$, поскольку по условию существует по крайней мере одна прямая, которая пересекается с семью другими прямыми. С другой стороны, $N \leqslant 12$. Для доказательства этого факта рассмотрим прямую l_1 , которая пересекается пятью прямыми m_1, m_2, ..., m_5. Тогда остальные прямые на плоскости не должны пересекать прямую l_1, и, следовательно, должны быть ей параллельны. Пусть это прямые l_2, l_3, ..., l_k. Любая из них тоже пересекается с пятью прямыми m_1, m_2, ..., m_5. Итак, все множество прямых на плоскости разбивается на группы: параллельные между собой k прямых l_1, l_2, ..., l_k и пересекающая их пятерка прямых m_1, m_2, ..., m_5. Поэтому всего прямых $N = k + 5$. Так как среди прямых m_1, m_2,..., m_5 есть (по условию) прямая, пересекающаяся с семью прямыми, причем заведомо её пересекают прямые 1_1, 1_2 ..., l_k, то $k \leqslant 7$. тогда $N \leqslant 7 + 5 = 12$. Итак, общее число прямых N четно, причем $8 \leqslant N \leqslant 12$.
Примеры расположения прямых для $N = 8$ и $N = 12$ приведены на рисунке. По-

кажем, что оставшийся случай $N = 10$ невозможен. Пусть l_1 — прямая, которая пересекается пятью прямыми $L_1, L_2, \ldots, L_5$. Тогда все остальные прямые (их четыре) на плоскости не должны пересекать прямую l_1 и, следовательно, должны быть ей параллельны. Пусть это прямые l_2, l_3, l_4, l_5. Поскольку прямая L_1 пересекается прямыми l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, то из условия следует, что существует ещё только две прямые, скажем, L_4 и L_5, которые пересекают прямую L_1. Это означает, что остальные две прямые L_2, L_3 параллельны L_1. Но тогда, например, прямая L_5 пересекает прямые L_1, L_2, L_3 и прямые $l_1, l_2, \ldots, l_5$ — всего 8 прямых — противоречие. Это противоречие и доказывает невозможность случая $N = 10$.





(b) На плоскости проведены несколько прямых. У каждой из прямых есть либо 5, либо 11 общих точек с остальными прямыми. Причём есть хотя бы одна прямая с пятью точками пересечения и хотя бы одна — с одиннадцатью точками пересечения. Сколько всего прямых может быть проведено?
Ответ: 12 или 16.

(c) На плоскости проведены несколько прямых. У каждой из прямых есть либо 3, либо 7 общих точек с остальными прямыми. Причём есть хотя бы одна прямая с тремя точками пересечения и хотя бы одна — с семью точками пересечения. Сколько всего прямых может быть проведено?
Ответ: 8 или 10.

(d) На плоскости проведены несколько прямых. У каждой из прямых есть либо 3, либо 11 общих точек с остальными прямыми. Причём есть хотя бы одна прямая с тремя точками пересечения и хотя бы одна — с одиннадцатью точками пересечения. Сколько всего прямых может быть проведено?
Ответ: 12 или 14.