КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА. МЛАДШАЯ ГРУППА.

1. Может ли так случиться, что число $a(b+c)$ оканчивается на 1, число $b+ac$ оканчивается на 2, число $c(a+b)$ оканчивается на 3 при некоторых натуральных a, b, c?

2. На стороне равностороннего треугольника сидят три муравья М, К и Н в одной и той же точке, отличной от вершины. Они начали одновременно ползти по границе треугольника с постоянными скоростями в одном и том же направлении. Известно, что у М скорость втрое больше чем у К, а у К — вдвое меньше чем у Н. Через некоторое время муравей М оказался в одной из вершин треугольника, а муравей К — в другой вершине. Докажите, что муравей Н в этот момент оказался в середине некоторой стороны.

3. Какое наибольшее количество клеток можно отметить в квадрате 12×12 так, чтобы никакие две отмеченные клетки не были соседними по стороне, а также не соприкасались друг с другом левым верхним и правым нижним углами?

4. На стороне BC равностороннего треугольника ABC лежит вершина D квадрата $CDEF$, а точки E, F, A находятся по одну сторону от прямой BC. Прямая ℓ проходит через точку F, пересекает сторону AB в точке X, а сторону AC — в точке Y. Оказалось, что $BD = BX$ и $CD = CY$. Докажите, что $CE = XF$.

5. Существуют ли такие натуральные a и b, что число $(2a+2b)!-ab$ является квадратом натурального числа?

6. В стране n городов, один из которых является столицей. Между некоторыми парами городов налажено авиасообщение. *Расстоянием* между городами называется минимальное количество перелетов, которые необходимо совершить, чтобы добраться от одного города до другого. Правительство хочет закрыть авиасообщение между некоторыми парами городов, но чтобы расстояние от столицы до любого другого города не изменилось. Известно, что существует нечетное количество способов, которыми правительство может это сделать. В том числе считается способ, в котором не закрывается ничего. Докажите, что нельзя, стартовав в некотором городе и совершив нечетное число перелетов, вернуться обратно в него.

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c = ab+bc+ca+1$. Докажите, что

$$\frac{b-ac}{ab+bc+1} + \frac{c-ab}{bc+ac+1} + \frac{a-bc}{ca+ab+1} < 1.$$

8. Рассмотрим 200 отрезков на координатной прямой. Каждый отрезок имеет концы в точках с натуральными координатами, не превосходящими 300. Длины всех отрезков различны. Будем говорить, что два отрезка образуют *вложенную пару*, если один из них полностью содержится в другом. Найдите наименьшее возможное количество вложенных пар.