ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ

Алгебра

1. **Формулы $a^n - b^n$ и $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.**

2. Найдите значение выражения:

$$\frac{(2+3)\left(2^2+3^2\right)\dots\left(2^{256}+3^{256}\right)\left(2^{512}+3^{512}\right)+2^{1024}}{3^{1024}}.$$

3. Найдите наибольшее возможное значение выражения:

$$20x - 4y + 6z - 2x^2 - 4y^2 - 3z^2 - 2.$$

4. Можно ли число $2^{58}+1$ представить в виде произведения трёх натуральных чисел, больших 1?

5. **Формула $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\cdot(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.**

6. **Неравенство Коши для двух чисел.**

7. Докажите неравенство $\dfrac{x}{x^4+y^2} + \dfrac{y}{y^4+x^2} \le \dfrac{1}{xy}$, где $x,\ y > 0$

8. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a^2+(b+1)^2} + \frac{1}{1+b^2+(c+1)^2} + \frac{1}{1+c^2+(a+1)^2} \le \frac{1}{2}.$$

9. Для положительных чисел x, y, z, w докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{x}{y+z+w}} + \sqrt{\frac{y}{x+z+w}} + \sqrt{\frac{z}{x+y+w}} + \sqrt{\frac{w}{x+y+z}} \ge 2.$$

10. Среди всех прямоугольников периметра P выберем тот, у которого наибольшая площадь. Чему равна эта площадь?

11. **Проценты. Вычисления ”сложных процентов”.**

12. Управдом Остап Бендер собирал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич из 105-й квартиры поинтересовался, почему у них во втором подъезде надо собирать денег на 40% больше, чем в первом, хотя квартир там и тут поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что за двузначные номера приходится платить вдвое, а за трёхзначные — втрое больше, чем за однозначные. Сколько квартир в подъезде?

13. В городе N каждый год проводили перепись населения. За 2022 год его население возросло на n человек, а за 2023 год — на 30000 человек. При этом в отчёте мэра города указано, что за 2022 год население увеличилось на 300%, а за 2023 — на n%. Сколько жителей стало в городе N в начале 2024 года?

14. Решите уравнения:
$(2x+y)(5x+3y)=7$, где x и y — целые;
$a^3+b^3=(a+b)^2$, где a и b — натуральные;
$p^q+q^p=r$, где p, q, r — простые.

15. График линейной функции.

16. Модули и преобразования графиков.

17. Найдите все положительные решения уравнения

$$x^{1001}+1001^{1000}=x^{1000}+1001^{1001}.$$

18. Придумайте такую функцию, заданную при всех действительных x, что её график переходит в себя при повороте на 90° вокруг начала координат.

19. Дана функция $f(x)=|4-4|x||-2$. Сколько решений имеет уравнение $f(f(x))=x$?

20. Функция Дирихле.

21. $f(x)=3-x^3-x$. Решите уравнение $f(f(x))=f(x)$.

Теория чисел

22. **Системы счисления. Запись числа в k-ичной системе счисления.**

23. У продавца на рынке есть 32 арбуза. Каждый час он раскладывает их на две кучи. Какое наименьшее количество часов потребуется, чтобы любые два арбуза хотя бы один раз оказывались в разных кучах? (Спрашивается про существование хотя бы одного способа так раскладывать арбузы, чтобы условие выполнилось.)

24. *Весом* натурального числа k назовём число 2^k+1. *Характеристикой* конечного множества натуральных чисел назовем произведение весов его элементов. Докажите, что характеристики двух различных множеств различны.

25. **Сравнения по модулю и их арифметические свойства. Сравнения по модулю разности: основные идеи.**

26. a, b и m — натуральные числа. Докажите, что если числа $a+b$ и a^2+b делятся на m, то a^n+b делится на m при любом натуральном n.

27. Натуральные числа a, b, x и y таковы, что $ax+by$ делится на a^2+b^2. Докажите, что x^2+y^2 и a^2+b^2 не взаимно просты.

28. Натуральные числа a, b и c, таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Докажите, что число $2a+2b+c$ — составное.

29. НОД и НОК. Взаимная простота. Замена через НОД.

30. Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД.

Геометрия

31. В каждой вершине куба сидела муха. В какой-то момент некоторые мухи перелетели на другие вершины куба так, что в каждой вершине куба снова оказалось по одной мухе. Докажите, что для каких-то трёх мух треугольник с вершинами в их начальном положении равен треугольнику с вершинами в их конечном положении.

32. **Сумма углов треугольника и выпуклого многоугольника.**

33. **Простейшие дополнительные построения в геометрии: продление медианы, сгибание по биссектрисе, выкладывание отрезков на прямой.**

34. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM=\angle MAK$. Докажите, что $BM+KD=AK$.

35. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D такая, что $BD = AC$. Медиана AM этого треугольника пересекает отрезок BD в точке K. Оказалось, что $DK=DC$. Докажите, что $AM+KM=AB$.

36. **Простейшие геометрические неравенства: соотношение между сторонами и углами треугольник; неравенство треугольника.**

37. В треугольнике ABC $\angle B=120^\circ$. BL — биссектриса этого треугольника. K и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки L на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что $2KM<AC$.

38. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AB=BC$, $\angle ABC=90^\circ$. На сторонах CD и DA выбраны точки E и F соответственно так, что $\angle FBE=75^\circ$. Докажите, что $AB+AF+CE\geq EF$.

39. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Известно, что $\angle AMD=120^\circ$. Докажите, что $AB+\frac{BC}{2}+CD\geqslant DA$.

40. Внутри круга радиуса 1 отметили восемь точек. Докажите, что среди них точно есть две, расстояние между которыми меньше 1.

41. **Выпуклая оболочка конечного набора точек. Существование и единственность.**

42. Внутри выпуклого 100-угольника выбраны 25 синих точек. Докажите, что можно покрасить 50 вершин исходного многоугольника в красный цвет так, чтобы все синие точки лежали внутри 50-угольника с красными вершинами.

Графы

43. **Степени вершин. Чётность числа нечётных вершин.**

44. **Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости графа.**

45. **Деревья. Висячие вершины. Количество рёбер и вершин в дереве.**

46. **Двудольные графы. Критерий двудольности графа.**

47. В классе учатся девочки и мальчики, всего 19 детей. Каждый из них дружит ровно с 10 своими одноклассниками. Учитель выбирает одного ученика и просит выйти его и всех его друзей. Докажите, что он может выбрать ученика так, чтобы в классе осталось не поровну мальчиков и девочек.

48. Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?

49. На плоскости провели несколько окружностей. Докажите, что части, на которые разбилась плоскость, можно покрасить в 2 цвета так, чтобы никакие 2 части, имеющие общую дугу, не были покрашены в один цвет.

Игры

50. **Стратегия разбиения на пары.**

51. На столе лежат 2024 карточки, на которых по разу написаны натуральные числа от 1 до 2024. Два игрока по очереди берут себе по одной карточке. Если после того, как все карточки будут разобраны, сумма чисел на карточках первого игрока будет делиться на 3, то выигрывает первый игрок, иначе — выигрывает второй. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

52. **Стратегия передачи хода.**

53. Два игрока по очереди пишут на доске натуральные числа, не превосходящие 1000. При этом нельзя писать делители уже выписанных чисел. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия.

54. **Выигрышные-проигрышные позиции.**

55. В мешке лежат 2024 камня. Двое по очереди выбрасывают из мешка любое число камней, равное простому числу или 1. Кто не может сделать ход, тот проиграл. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Разная комбинаторика

56. **Цепи — вложенные множества.** 11 школьников записались в 5 спортивных клубов. Докажите, что среди них есть двое таких, что во все клубы, в которые записался первый, записался и второй.

57. **Инварианты и полуинварианты. Примеры для решения задач.**

58. Вася выписывает в ряд 400 натуральных чисел. Первое число он пишет любое, а каждое следующее — либо в 9 раз больше предыдущего, либо в 2 раза меньше предыдущего (при условии, что получается целое число). Может ли сумма всех его чисел оказаться равной 24^{2000}?

59. На доске написаны числа 0, 1, $\sqrt{2}$. Разрешается к любому из этих чисел прибавить разность двух других, умноженную на любое рациональное число. Можно ли такими операциями получить числа 0, 2, $\sqrt{2}$?

60. Учитель написал на стене число 0. В первый день один из учеников прибавил число 2 к числу на стене и записал новое число вместо старого. Во второй день другой ученик прибавил $2 \cdot 3$ к уже написанному числу на стене и записал новое число вместо старого. И так далее, В k-ый день очередной ученик прибавлял к числу на степе произведение первых k простых чисел. Найдите все натуральные n такие, что после n дней на стене оказалась степень двойки.

61. По окружности расставлены действительные числа. Если четыре последовательно стоящих числа a, b, c, d таковы, что $(a-d)(b-c) > 0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такие перестановки можно выполнить лишь конечное число раз.

62. В библиотеке на полке в произвольном порядке расставлены N томов энциклопедии с номерами от 1 до N. Робот-библиотекарь каждую минуту делает следующее: берёт произвольный том, стоящий не на своём месте, и ставит его на место (т.е. если номер тома k, то он ставит его k-ым по счёту). Докажите, что когда-то все тома окажутся на своих местах.

63. **Принцип крайнего для решения задач.**

64. Сто положительных чисел расставили по кругу так, что квадрат любого из чисел равен сумме двух других чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Чему могут быть равны эти числа?

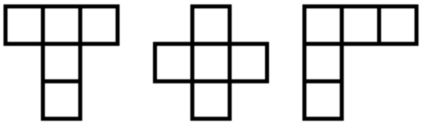
65. На плоскости расположены несколько многоугольников, любые два из которых пересекаются. Докажите, что существует прямая, пересекающая каждый из этих многоугольников.

66. 18 гирь выставлены в ряд. Известно, что три из них весят по 999 г, причём они стоят подряд, а все остальные весят по 1 кг.За два взвешивания определите все 999-грамовые гири.

67. **Раскраски. Виды раскрасок для решения задач.**

68. Можно ли три попарно соседние грани куба $4 \times 4 \times 4$ оклеить полосками 1×3?

69. От квадратной доски 1001×1001 отрезали четыре угловых квадрата 2×2. Можно ли оставшуюся часть разбить на фигурки, как на картинке (фигурки можно поворачивать)?



70. Назовём две левые фигурки на картинке «тетрамином первого типа», а две правые — «тетрамином второго типа». Про клетчатый многоугольник известно, что его можно разбить на тетрамино только первого типа. Докажите, что при любом разбиении этого многоугольника на тетрамино, тетрамино второго типа будет использовано чётное число раз.

71. **Инверсии и перестановки.**

72. Дано n магнитофонных лент, намотанных красными концами наружу, а зелёными внутрь. При каких n их можно перемотать, пользуясь одной пустой катушкой, так чтобы они оказались на своих прежних местах, но зелёными концами наружу?

73. Клара разложила в ряд несколько карточек с числами от 1 до n. Карл берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было левее неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь ровно столько же карточек оказалось правее неё. Далее он по очереди проделывает такую же операцию с карточками $2, 3, \ldots, n$. Докажите, что после того, как Карл совершит все n действий, количество инверсий окажется таким же, как было в начале.