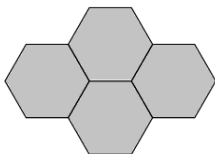


Бесконечная клетчатая плоскость

1. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги записано целое число. При этом оказалось, что каждое число равно среднему арифметическому четырёх соседних чисел. Верно ли, что все числа равны между собой?
2. Можно ли клетки бесконечной клетчатой плоскости раскрасить в два цвета так, чтобы не было трёх клеток одного цвета подряд ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали?
3. Клетки бесконечной клетчатой плоскости раскрасили в 5 цветов. При этом оказалось, что в любом «кресте» из пяти клеток присутствуют клетки всех цветов. Докажите, что в любой «полоске» из пяти клеток тоже присутствуют клетки всех цветов.
4. Узлы бесконечной клетчатой плоскости раскрашены в 5 цветов. Верно ли, что существует прямоугольник с вершинами одного цвета, стороны которого параллельны линиям сетки?
5. (а) Расставьте во всех клетках бесконечной клетчатой плоскости все целые числа по одному (каждое целое число — ровно в одной клетке) так, чтобы у каждого числа все четыре соседние по стороне числа были либо только больше, либо только меньше его.
(б) Можно ли расставить все целые числа в клетках плоскости по одному, но так, чтобы у каждого числа среди соседних по стороне было два больших его и два меньших его?

6. *(теперь треугольник)* Узлы бесконечной клетчатой плоскости раскрашены в 3 цвета, причём все цвета присутствуют. Верно ли, что обязательно найдётся прямоугольный треугольник (с катетами не обязательно параллельными линиям сетки), вершины которого раскрашены в разные цвета?
7. *(клетки сложной формы)* Двое играют в игру на бесконечной шестиугольной решетке. Они ходят по очереди, за один ход игрок закрашивает одну из не закрашенных шестиугольных клеток. Но перед тем, как будет закрашена 2024-я по счёту клетка, правила усложняются: теперь закрашивать можно лишь клетку, у которой хотя бы две соседние клетки уже закрашены. Игрок проигрывает, если он не может сделать ход, или после его хода появился закрашенный ромб как на рисунке (его можно поворачивать). Есть ли у кого-то из игроков выигрышная стратегия?



8. *(не совсем про бесконечность)* Пусть T_k — максимальное количество не соприкасающихся между собой кораблей 1×3 на поле $k \times k$. Докажите, что $T_{2n} = T_{2n-1}$ при любом натуральном n .