Принцип крайнего

-1. По кругу расставлены несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух своих соседей. Докажите, что все числа равны.

0. На шахматной доске расставлены несколько ладей. Докажите, что одна из ладей бьёт не более двух других.

1. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги записано натуральное число. При этом оказалось, что каждое число равно среднему арифметическому четырёх соседних чисел. Докажите, что все числа равны между собой.

2. **а)** Можно ли числа от 1 до 16 расставить в ряд так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих была точным квадратом?
б) Тот же вопрос, но если числа надо расставить по кругу?

3. Сто положительных чисел расставили по кругу так, что квадрат любого из чисел равен сумме двух других чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Чему могут быть равны эти числа?

4. В лесу в шеренгу выстроились лисы и волки. Любой зверь, стоящий между двумя лисами, дружит хотя бы с одной из них. Докажите, что точно есть два зверя, стоящие рядом, которые в совокупности дружат со всеми лисами. (Считается, что зверь дружит сам с собой.)

5. **а)** На прямой расположены несколько отрезков, любые два из которых пересекаются. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам.
б) На плоскости расположены несколько многоугольников, любые два из которых пересекаются. Докажите, что существует прямая, пересекающая каждый из этих многоугольников.

---

6. На математическую олимпиаду приехали несколько школьников, среди которых есть друзья. Оказалось, что если у двух школьников равное число друзей среди участников олимпиады, то общих друзей у них нет. Докажите, что найдётся участник олимпиады, у которого ровно один друг среди других участников.

7. На прямоугольном листе бумаги нарисовали 13 прямоугольников со сторонами, параллельными краям листа, так, что любой из прямоугольников пересекается хотя бы с 10 другими. Докажите, что хотя бы один из прямоугольников пересекается со всеми остальными.

8. На плоскости расположены 5 кругов, любые два из которых пересекаются. Докажите, что существует точка, покрытая хотя бы тремя из этих кругов.