Сравнения по модулю разности и ещё пара идей

Ключевая идея. $a \equiv b \pmod{a-b}$ и $a \equiv -b \pmod{a+b}$.

Идея. Числа взаимно просты тогда и только тогда, когда у них нет общего простого делителя.

-1. Натуральные a и b взаимно просты. Докажите, что $\text{НОД}(a+b, a^2+b^2) \leqslant 2$.

Замена через НОД. Пусть $\text{НОД}(a,b) = d$. Тогда $a = a_0 \cdot d, b = b_0 \cdot d$, $\text{НОД}(a_0, b_0) = 1$; $\text{НОК}(a_0, b_0) = a_0 b_0$; $\text{НОК}(a,b) = \dfrac{ab}{\text{НОД}(a,b)} = a_0 \cdot b_0 \cdot d$.

Комментарий. Стратегия рассмотрения выражения по модулю общего простого делителя полезна, когда хочется что-то понять про НОД. Замена через НОД, в свою очередь, позволяет использовать взаимную простоту в контексте сравнений по модулю.

Идея. Если произведение делится на натуральное число n, но ни один из сомножителей не делится на n, то n — составное.

0. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$. Докажите, что число $s = a + b + c + d$ — составное.

---

5. Найдите все пары натуральных a и b таких, что $a^2 + b$ кратно $b^2 + a$, если $b^2 + a$ **(а)** простое число; **(б)** простое в целой степени (выше первой).

6. Найдите все пары натуральных чисел x, y такие, что $x^3 + 1$ делит $(x+1)^y$.

7. Придумайте числа $b > a > 1000$, для которых $a^b - 1$ делится на $b^a - 1$.

---

8. Натуральные числа a, b, c таковы, что $b^2 + c^2 - a^2$ делится на $a + b + c$. Докажите, что число $a + b + c$ — составное.

9. Натуральные числа a, b и c, таковы, что $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$. Докажите, что число $2a + 2b + c$ — составное.

10. Докажите, что натуральные числа a и b равны, если
(а) $a^2 + ab + 1$ кратно $b^2 + ab + 1$;
(б) $a^2 + ab + b^2$ кратно $a^2 - ab + b^2$.