Сравнения по модулю разности

Определение. Два целых числа a и b называются *сравнимыми по натуральному модулю* n, если их разность делится на n.

Обозначение сравнимости a и b по модулю n. $a \equiv b \pmod{n}$ или $a \underset{n}{\equiv} b$.

Ключевая идея. $a \equiv b \pmod{a-b}$ и $a \equiv -b \pmod{a+b}$.

Свойства сравнимости. Если $a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n}$, то:

- $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
- $a - c \equiv b - d \pmod{n}$
- $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$
- $a^m \equiv b^m \pmod{n}$ для любого натурального m
- $a \equiv b \pmod{\frac{n}{k}}$, если n делится на k
- $\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \pmod{\frac{n}{k}}$, если a, b, n делятся на k
- $\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \pmod{n}$, если a и b делятся на взаимно простое с n число k

---

0. $(n^2 - n + 1)^2$ делится на $mn - 1$. Найдите выражение меньшей степени (чем 4), которое делится на $mn - 1$.

1. Сколько есть целых n, для которых $5n^5 + 4n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n$ делится на $n + 1$?

2. a, b и m — натуральные числа. Докажите, что если числа $a + b$ и $a^2 + b$ делятся на m, то $a^n + b$ делится на m при любом натуральном n.

3. Натуральное число n таково, что для любых различных натуральных a и b число $a^2 + b^2 - nab$ делится на $a - b$. Чему может быть равно n?

4. Натуральные числа a, b, x и y таковы, что $ax + by$ делится на $a^2 + b^2$. Докажите, что $x^2 + y^2$ и $a^2 + b^2$ не взаимно просты.

---

5. Найдите все пары натуральных a и b таких, что $a^2 + b$ кратно $b^2 + a$, причём $b^2 + a$ — простое число в натуральной степени (возможно, первой).

6. Найдите все пары натуральных чисел x, y такие, что $x^3 + 1$ делит $(x + 1)^y$.

7. Найдите какие-нибудь числа $b > a > 1000$, для которых $a^b - 1$ делится на $b^a - 1$.