Кооперативные стратегии

-1. Слепой маг даёт гостю пять карт с номерами от 1 до 5. Гость прячет две карты, три отдаёт ассистенту мага. Ассистент возвращает гостю две из них, и гость говорит номера этих карт магу (в любом порядке). Маг должен назвать номера карт, спрятанных гостем. Как магу и ассистенту договориться, чтобы фокус всегда удавался?

0. Петя пишет 9 разрядов 10-значного десятичного числа и пропускает один по своему выбору. Пропущенный разряд он предлагает записать Васе, а затем показывает полученное 10-значное число Толе. Как могут Вася и Толя договориться, чтобы Толя угадал, какой именно разряд записал Вася?

1. n мудрецов будут выстроены в колонну (каждый видит только тех, кто находится впереди него), и каждому наденут либо чёрный, либо белый колпак (колпаков обоих цветов неограниченное количество). Мудрецы по очереди (порядок определяют мудрецы), назовут цвет своей шляпы. Докажите, что минимум $n-1$ мудрецов правильно назовут цвет своей шляпы.

2. На столе лежат n карт с номерами от 1 до n. Два зрителя по очереди берут по одной карте. Затем помощник фокусника берёт одну карту себе. После чего приходит фокусник, смотрит на оставшиеся номера и говорит, у какого зрителя какой номер карты. Могут ли фокусник и помощник договориться так, чтобы фокус всегда удавался при **(а)** $n = 7$; **(б)** $n = 8$?

3. Есть n мудрецов. На каждого из них надевают колпак одного из n цветов (колпаков всех цветов неограниченное количество). Затем все одновременно говорят (видя остальных), какого цвета колпаки на них. Цель — угадать хоть одному. Докажите, что это можно сделать при **(а)** $n = 2$; **(б)** $n > 2$, если мудрецы заранее могут договориться о чём угодно.
(в) Теперь есть $10n$ мудрецов и колпаки n цветов, каждого цвета неограниченное количество. Докажите, что 10 мудрецов могут угадать свой цвет, но нет алгоритма угадывания для 11-ти мудрецов.

4. Алисе и Бобу на лбу написали по одному числу. После этого каждый из них должен написать на бумажке конечный набор чисел. Каждый видит число другого, но никаких подсказок давать не разрешается. Могут ли они так договориться заранее, чтобы в наборе хотя бы одного из них встретилось его число, если все числа по условию **(а)** целые; **(б)** рациональные?

5. Гость пишет последовательность из нулей и единиц длины 2^{2025}. Затем помощник верно называет слепому магу номер и значение некоторого одного члена последовательности. Цель мага — отгадать 2025 другихчленов последовательности (т. е. назвать их номера и значения). Докажите, что они могут заранее договориться так, чтобы фокус удался.