Полуинварианты

-1. На доске написаны числа от 1 до 100. За один ход можно заменить числа a и b на $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$. Докажите, что первоначальный набор чисел больше не повторится.

0. По кругу написано несколько натуральных чисел. Каждую минуту между двумя соседними числами пишут их НОД, а старые числа стирают. Докажите, что через какое-то время все числа станут равными.

1. В клетках доски 99×99 расставлены числа $+1$ и -1. Одним ходом можно поменять знак всех чисел в какой-то строке или в каком-то столбце. Докажите, что можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел стала положительной.

2. Докажите, что любые $2n$ точек на плоскости являются концами n непересекающихся отрезков.

3. В городе живут квасники и кефирники. Назовём человека *странным*, если более половины его друзей готовят окрошку не на том напитке, как он. Каждое лето, если в городе есть странные люди, то один из них поддаётся влиянию друзей и меняет напиток для приготовления окрошки на другой. Докажите, что однажды в городе не останется странных людей.

4. Поле 10×10 разбито на 100 одинаковых квадратных участков, из которых 9 поросли бурьяном. Бурьян за год распространяется на те участки, у которых не менее двух соседних (имеющих общую сторону) участков уже им поросли. Докажите, что поле никогда не зарастёт бурьяном полностью.

5. По окружности расставлены действительные числа. Если четыре последовательно стоящих числа a, b, c, d таковы, что $(a-d)(b-c) > 0$, то числа b и c можно поменять местами. Докажите, что такие перестановки можно выполнить лишь конечное число раз.

6. При дворе короля Артура собрались $2n$ рыцарей, причём у каждого из них среди присутствующих не более $n-1$ врага. Докажите, что волшебник Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за круглым столом, чтобы ни один из них не сидел рядом со своим врагом.

7. В библиотеке на полке в произвольном порядке расставлены N томов энциклопедии с номерами от 1 до N. Робот-библиотекарь каждую минуту делает следующее: берёт произвольный том, стоящий не на своём месте, и ставит его на место (т.е. если номер тома k, то он ставит его k-ым по счёту). Докажите, что когда-то все тома окажутся на своих местах.