

## Инверсии и перестановки

- 2. Три кузнечика прыгают по прямой. Каждую секунду один из них перепрыгивает через ближайшего перед ним. Пронумеруем кузнечиков по порядку: 1, 2, 3. Могут ли они через минуту оказаться в таком порядке: 2, 1, 3?

Пусть в ряд написано несколько чисел. Будем говорить, что пара чисел образует *инверсию*, если большее из них стоит в ряду левее.

- 1. Сколько инверсий образуют числа: 5, 2, 7, 1, 3?

*Чётностью расстановки* называется чётность числа её инверсий.

0. Докажите, что если в некоторой расстановке поменять два числа местами, то её чётность изменится.
1. Числа 1, 2, 3, ..., 250 записаны по порядку. Разрешается выбрать любые четыре числа и расставить их на тех же местах, но в обратном порядке. Можно ли с помощью таких операций прийти к расположению 250, 249, ..., 3, 2, 1?
2. В городе разрешены только тройные обмены квартир (т.е. А переезжает в квартиру В, В — в С, С — в А). Смогут ли два человека поменяться квартирами?
3. 123 машины стартовали из разных точек трассы и целый день ездили по кругу. Вечером каждая машина оказалась на том же месте, откуда и стартовала. Докажите, что было совершено чётное число обгонов.
4. *Игра "15"*. Дан квадрат, в котором находятся 15 фишек с числами, расположенные так, как показано на рисунке слева. Каждый раз можно в свободную ячейку перемещать одну из соседних фишек. Можно ли в итоге получить расположение фишек, показанное на рисунке справа?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

5. Дано  $n$  магнитофонных лент, намотанных красными концами наружу, а зелёными внутрь. При каких  $n$  их можно перемотать, пользуясь одной пустой катушкой, так чтобы они оказались на своих прежних местах, но зелёными концами наружу?
6. Клара разложила в ряд несколько карточек с числами от 1 до  $n$ . Карл берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было левее неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь ровно столько же карточек оказалось правее неё. Далее он по очереди проделывает такую же операцию с карточками 2, 3,  $\dots$ ,  $n$ . Докажите, что после того, как Карл совершит все  $n$  действий, количество инверсий окажется таким же, как было в начале.