Алгебраические преобразования

0. **(а)** Докажите, что

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

(б) Сумма чисел a, b и c равна 0 Докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

1. Числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$(a + b + c)(ab + bc + ac) = abc.$$

Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.

2. Даны целые a, b, c, d и $n = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$. Докажите, что существуют такие целые x и y, что $n = x^2 + y^2$.

3. Натуральные числа a, b, c таковы, что

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Докажите, что ab — точный квадрат.

4. Целые числа x, y и z таковы, что

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = xyz.$$

Докажите, что $x^3 + y^3 + z^3$ делится на $x + y + z + 6$.

5. Найдите все тройки положительных чисел a, b, c, удовлетворяющие условиям

$$a + b + c = 3, \quad a^2 - a \geq 1 - bc, \quad b^2 - b \geq 1 - ac, \quad c^2 - c \geq 1 - ab.$$

6. Целые числа a, b и c таковы, что $ab + bc + ca = 1$. Известно, что

$$a + b + c - abc = 2p, \text{ где } p \text{ — простое.}$$

Найдите p.