Ещё больше неравенств

0. Для $0 \le x,\ y,\ z \le 1$ докажите неравенство

$$\frac{x^2}{1+x+xyz} + \frac{y^2}{1+y+xyz} + \frac{z^2}{1+z+xyz} \le 1.$$

1. Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c=2$. Докажите, что

$$ab+bc+2ac \le 2.$$

2. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a+b+c+d=1$. Докажите, что

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3+d^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3+a^3}{d^2+a^2} \ge 1.$$

3. Числа a, b, c, d удовлетворяют условиям $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ и $ab+cd=1$. Докажите, что какие-то два из них отличаются не менее чем на 1, а какие-то два из них отличаются не более чем на 1.

4. Числа a, b, c таковы, что $ab+a+b \ge 0$ и $ac+a+c \ge 0$. Докажите, что

$$bc+b+c > -1.$$

5. Для чисел $a,\ b,\ c \ge 3$ докажите неравенство

$$3(abc+b+2c) \ge 2(ab+2ac+3bc).$$